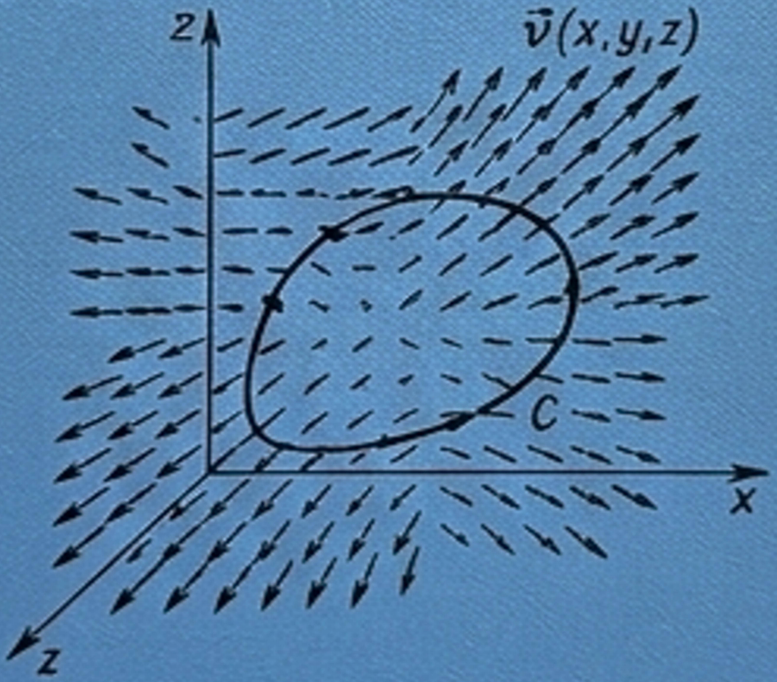
Р. М. ЖЕВНЯК
А. А. КАРПУК

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА




Часть 3

Р. М. ЖЕВНЯК,
А. А. КАРПУК

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ч. III

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов втузов

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1985

~~ББК 22.11я73~~
Ж45
~~УДК~~ 51(075.8)

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института и *М. В. Федорюк*, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики Московского физико-технического института

**Жевняк Р. М., Карпук А. А.**

Ж45 Высшая математика: [Учеб. пособие для втузов]. Ч. III.— Мн.: Выш. шк., 1985.— 208 с., ил.

В пер.: 65 к.

В пособии излагаются обыкновенные дифференциальные уравнения, включая элементы теории устойчивости, теория числовых и функциональных рядов, а также ряды и интегралы Фурье с подробным изложением свойств преобразования Фурье.

**ББК 22.11 я73**

Ростислав Михайлович ~~Жевняк~~

Андрей Андреевич Карпук

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Ч. III

Зав. редакцией Л. Д. Духвалов. Редактор С. С. Голод. Мл. редактор М. С. Молчанова. Обложка и худож. редактирование Ю. С. Сергачева. Техн. редактор И. П. Тихонова. Корректор Т. К. Хваль.

ИБ № 2040

Сдано в набор 16.11.84. Подписано в печать 10.06.85. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага для множ. аппаратов. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 13. Усл. кр.-отт. 13,25. Уч.-изд. л. 14,19. Тираж 8000 экз. Зак. 896. Цена 65 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005. Минск, ул. Красная, 23.

Ж $\frac{1702010000—083}{М304(05)—85}$ 18—85

© Издательство «Вышэйшая школа», 1985

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . . 3

**8. Обыкновенные дифференциальные уравнения** . . . . . 5

8.1. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . . 5
8.2. Дифференциальные уравнения первого порядка . . . . . 12
8.3. Дифференциальные уравнения высших порядков . . . . . 31
8.4. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков . . 35
8.5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . . 48
8.6. Системы дифференциальных уравнений . . . . . 59
8.7. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . . 72
8.8. Элементы теории устойчивости . . . . . 79

**9. Ряды** . . . . . 97

9.1. Числовые ряды . . . . . 97
9.2. Функциональные ряды . . . . . 119
9.3. Степенные ряды . . . . . 131
9.4. Ряды Тейлора . . . . . 139
9.5. Функции Бесселя . . . . . 147

**10. Ряды и интеграл Фурье** . . . . . 156

10.1. Тригонометрические ряды Фурье . . . . . 156
10.2. Ряды Фурье по ортогональным системам функций 171
10.3. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье . . . 185
10.4. Гильбертово пространство . . . . . 200

Литература . . . . . 207

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга является продолжением предыдущих двух частей учебного пособия «Высшая математика» для студентов высших технических заведений. Она написана на основе лекций, читаемых авторами в Минском радиотехническом институте, в полном соответствии с действующей программой курса высшей математики для втузов.

В книге излагаются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, интегрируемые в квадратурах, уравнения высших порядков, системы линейных дифференциальных уравнений, элементы теории устойчивости. При интегрировании систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами применяется векторно-матричный способ. Рассматривается теория числовых, общих функциональных, степенных рядов и их применение в приближенных вычислениях, а также числовых рядов с комплексными коэффициентами. В пособии большое внимание уделяется изложению рядов и интегралов Фурье. Вначале рассматриваются тригонометрические ряды Фурье и формулируются условия представления функций этими рядами, а затем изучаются ряды по ортогональным системам функций в пространстве функций с интегрируемым квадратом. Вводится понятие гильбертова пространства и рассматривается теория абстрактных рядов Фурье в этом пространстве.

В книге подобрано много примеров, иллюстрирующих основные положения теории. В конце каждого параграфа имеются задачи и упражнения для самостоятельного решения.

Методически данное пособие построено таким образом, что студент, усвоивший его основные положения, справится с выполнением типовых расчетов «Дифференциальные уравнения» и «Ряды», предусмотренных программой курса высшей математики. Нумерация глав, параграфов, формул и рисунков в данной части продолжает соответствующую нумерацию предыдущих двух частей пособия. Начало доказательств теорем, решений примеров и задач отмечено знаком □, а конец доказательств — знаком ■.

Авторы благодарны старшему научному сотруднику Института математики АН БССР И. В. Гайшуну и доценту кафедры дифференциальных уравнений БГУ им. В. И. Ленина В. В. Амелькину за ценные советы и замечания, высказанные при прочтении рукописи. Особую благодарность авторы выражают рецензентам доктору физико-математических наук профессору кафедры высшей математики Московского физико-технического института М. В. Федорюку, члену-корреспонденту АН СССР, заведующему кафедрой высшей математики Московского энергетического института доктору физико-математических наук профессору С. И. Похожаеву и сотрудникам этой кафедры профессору М. Л. Краснову, доценту П. А. Шмелеву, чье внимательное и объективное рецензирование значительно способствовало улучшению содержания книги.

Все замечания и пожелания просим направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Вышэйшая школа».

*Авторы*

# 8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## 8.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.** Многие задачи математики, физики, естествознания приводят к дифференциальным уравнениям. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Найти уравнение кривой, в каждой точке которой тангенс угла наклона касательной к оси $X$ пропорционален квадрату ординаты точки касания.

□ Пусть $y=y(x)$ — уравнение искомой кривой. Так как $y'(x)$ равен тангенсу угла наклона к оси $X$ касательной, проведенной в точке $(x, y(x))$ кривой, то из условия задачи получаем соотношение

$$y'=ky^2, \quad y=y(x), \tag{8.1}$$

где $k$ — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, получено соотношение, аналитически выражающее суть рассматриваемой геометрической задачи, в которое, кроме неизвестной функции $y=y(x)$, входит и ее производная $y'(x)$. Соотношение (8.1) является примером дифференциального уравнения. Оно содержит наряду с неизвестной функцией $y$ и ее производную $y'$.

Функцию $y=y(x)\not\equiv 0$ из уравнения (8.1) можно легко найти:

$$(y'/y^2 = k) \Leftrightarrow \left((-1/y)'_x = k\right) \Leftrightarrow (-1/y = kx + C),$$

отсюда

$$y=-1/(kx+C), \tag{8.2}$$

где $C$ — произвольная константа (постоянная интегрирования).

Заметим, что уравнению (8.1) удовлетворяет целое семейство кривых (8.2), зависящих от параметра $C$. Чтобы выделить какую-то одну кривую из семейства (8.2), надо указать константу $C$. Для этого достаточно задать на плоскости $XY$ точку $(x_0, y_0)$, через которую эта кривая проходит. Тогда постоянную $C$, отвечающую этой кривой, найдем, положив в равенстве (8.2) $y=y_0$ при $x=x_0$, т. е.

$$(y_0=-1/(kx_0+C)) \Rightarrow (C=-kx_0-1/y_0).$$

Таким образом, искомая кривая семейства (8.2), проходящая через точку $(x_0, y_0)$, определяется равенством

$$y=\frac{y_0}{1-ky_0(x-x_0)}. \tag{8.3}$$

Заметим, что уравнению (8.1) удовлетворяет еще функция $y=0$, не получающаяся из равенства (8.2) ни при каком значении постоянной $C$.

**Пример 2.** В $RL$-цепь (рис. 8.1) с постоянными индуктивностью $L$ и активным сопротивлением $R$ подано напряжение $u$, зависящее от времени $t$, т. е. $u=f(t)$, где $f$ — известная функция. Найти зависимость тока $i$ от времени $t$, если в начальный момент времени $t_0=0$ начальный ток равен $i_0$.

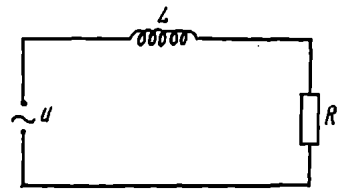



Рис. 8.1.

□ По закону Кирхгофа падение напряжения в цепи $Ri$ равно сумме ЭДС $u - L\dfrac{di}{dt}$, где $\left(-L\dfrac{di}{dt}\right)$ — ЭДС самоиндукции, т. е. $Ri = u - L\dfrac{di}{dt}$. Отсюда получаем равенство

$$L\frac{di}{dt} + Ri = f(t). \tag{8.4}$$

Соотношение (8.4) является примером дифференциального уравнения. В него входит неизвестная функция $i=i(t)$ и ее производная $di/dt$. Нетрудно проверить, что функция

$$i = e^{-Rt/L}\left[i_0 + \frac{1}{L}\int_0^t f(\tau)\, e^{R\tau/L} d\tau\right] \tag{8.5}$$

является решением уравнения (8.4), удовлетворяющим условию $i(0)=i_0$.

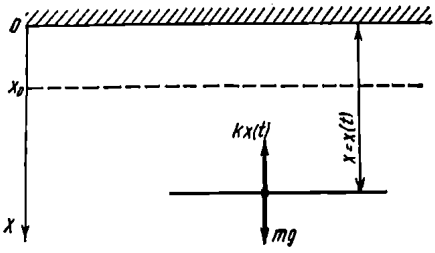


Рис. 8.2

**Пример 3.** Тело массой $m$ погружается с начальной скоростью $v_0$ в вязкую среду. Найти закон движения тела, если сопротивление среды пропорционально его скорости движения (коэффициент пропорциональности $k$) (рис. 8.2).

□ Пусть $x=x(t)$ — расстояние тела от заданного положения $x=0$. Тогда $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ — его скорость и ускорение движения соответственно. Из второго закона Ньютона получаем соотношение

$$m\ddot{x}(t) = mg - k\dot{x}(t)$$

или

$$\ddot{x} + a\dot{x} = g, \tag{8.6}$$

где $a=k/m$. Соотношение (8.6) является дифференциальным уравнением, содержащим неизвестную функцию $x$ и ее производные $\dot{x}$ и $\ddot{x}$.

Найдем искомый закон движения $x=x(t)$, такой, что в начальный момент времени $t_0=0$ положение $x(0)=x_0$, а скорость $\dot{x}(0)=v_0$.

Умножая обе части уравнения (8.6) на $e^{at}$, получаем равенство

$$\left(\ddot{x}e^{at} + a\dot{x}e^{at} = ge^{at}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\dot{x}e^{at}\right)'_t = ge^{at}\right).$$

Отсюда интегрированием находим

$$\dot{x}e^{at} = \frac{g}{a}e^{at} + C_1$$

или

$$\dot{x} = \frac{g}{a} + C_1 e^{-at}, \tag{8.7}$$

где $C_1$ — постоянная интегрирования.

Интегрируя равенство (8.7), окончательно получаем

$$x = \frac{g}{a}t - \frac{C_1}{a}e^{-at} + C_2, \tag{8.8}$$

где $C_2$ — постоянная интегрирования.

Нетрудно убедиться в том, что семейство функций (8.8), зависящее от параметров $C_1$ и $C_2$, действительно удовлетворяет уравнению (8.6). Для выбора решения, удовлетворяющего условиям $x(0)=x_0$ и $\dot{x}(0)=v_0$, полагаем в равенствах (8.7) и (8.8) значение $t=0$. При этом получаем систему

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= g/a + C_1; \\ x_0 &= -C_1/a + C_2, \end{aligned}\right\}$$

из которой находим, что $c_1 = v_0 - g/a$, $C_2 = x_0 + v_0/a - g/a^2$.

Таким образом, искомый закон движения определяется равенством

$$x(t) = \frac{g}{a}t + \left(\frac{g}{a^2} - \frac{v_0}{a}\right)e^{-at} + x_0 + \frac{v_0}{a} - \frac{g}{a^2}, \quad a = \frac{k}{m}. \tag{8.9}$$

**Основные понятия теории дифференциальных уравнений.** Пусть $F: \mathbf{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, определенная на открытом множестве $E \subset \mathbf{R}^{n+2}$. Соотношение

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{8.10}$$

связывающее независимую переменную $x$, неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$ (наличие хотя бы одной производной обязательно), называется *дифференциальным уравнением.*

Если уравнение (8.10) можно записать в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \tag{8.11}$$

где $f: \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ — известная функция, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$, то будем говорить, что *дифференциальное уравнение разрешено относительно старшей производной* $y^{(n)}$. Оно называется *дифференциальным уравнением в нормальной форме.*

Дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция $y$ зависит от одной переменной $x$, называется *обыкновенным.* Если же дифференциальное уравнение содержит неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные, то оно называется *уравнением в частных производных.* В данной главе мы ограничимся изучением обыкновенных дифференциальных уравнений и слово «обыкновенное» в дальнейшем будем опускать.

*Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной искомой функции, входящей в уравнение. Так, соотношения (8.1), (8.4) — дифференциальные уравнения первого порядка, уравнение (8.6) — второго порядка, а уравнение $y^{IV} + 5y'' - 4y'^5 = 0$ является дифференциальным уравнением четвертого порядка.

*Решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения (8.10) называется действительная функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале $(a, b)$, такая, что:

а) $y$ принадлежит классу $C^{(n)}(a, b)$, т. е. функция $y = y(x)$ является $n$ раз непрерывно дифференцируемой функцией на $(a, b)$;

б) точка $(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x))$ принадлежит множеству $E \subset \mathbf{R}^{n+2}$ для всех $x \in (a, b)$, где $E$ — область определения функции $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$;

в) $F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$.

При выполнении условий «а» — «в» говорят, что функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению (8.10).

Всякому решению дифференциального уравнения (8.10) на плоскости отвечает некоторая кривая

$$y = y(x), \quad x \in (a, b), \tag{8.12}$$

которая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (8.10).

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Дифференциальное уравнение, как правило, имеет бесчисленное множество решений (примеры 1—3 подтверждают этот факт). Чтобы выделить какое-то одно решение дифференциального уравнения, необходимо задание некоторых дополнительных условий. Таким условием для уравнения (8.1) является задание точки $(x_0, y_0)$ плоскости $XY$, через которую должна проходить интегральная кривая этого уравнения. В примере 2 для дифференциального уравнения (8.4) этим условием явилось задание начального тока $i(0)=i_0$. В примере 3 для дифференциального уравнения второго порядка (8.6) два условия $x(0)=x_0$ (начальное положение) и $\dot{x}(0)=v_0$ (начальная скорость) однозначно определяют закон движения (8.9).

**Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.** При $n=1$ соотношение (8.10) определяет уравнение

$$F(x, y, y')=0, \quad y=y(x), \tag{8.13}$$

называемое *дифференциальным уравнением первого порядка.* Здесь $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ — заданная функция, определенная в некоторой области $E \subset \mathbf{R}^3$.

Уравнение

$$y'=f(x, y), \tag{8.14}$$

где $f(x, y)$ — известная функция переменных $x$, $y \in D \subset \mathbf{R}^2$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной* $y'$, или *дифференциальным уравнением в нормальной форме.*

Соотношение

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0, \tag{8.15}$$

где $P$ и $Q$ — заданные функции, определенные в области $D \subset \mathbf{R}^2$, также называется дифференциальным уравнением первого порядка, записанным в дифференциальной форме.

Заметим, что уравнение (8.14) с учетом равенства $y'=dy/dx$ может быть записано в виде

$$f(x, y)dx-1 \cdot dy=0. \tag{8.16}$$

С другой стороны, если $Q(x, y) \neq 0$, $\forall\ (x, y) \in D$, то из соотношения (8.15) приходим к уравнению

$$y'=-P(x, y)/Q(x, y)$$

вида (8.14), где $f=-P/Q$.

Будем рассматривать в дальнейшем уравнения (8.14) или (8.15).

*Решением* (или *интегралом*) уравнения (8.13) называется действительная функция $y=\varphi(x)$, определенная на некотором интервале $(a, b)$, такая, что:

а) $\varphi(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией на $(a, b)$;

б) точка $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$, $\forall x \in (a, b)$, принадлежит области определения $E \subset \mathbf{R}^3$ функции $F$;

в) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0, \forall x \in (a, b)$.

Аналогично решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ называется непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, такая, что точка $(x, \varphi(x))$ принадлежит области определения $D$ функции $f(x, y)$ и $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)), \forall x \in (a, b)$.

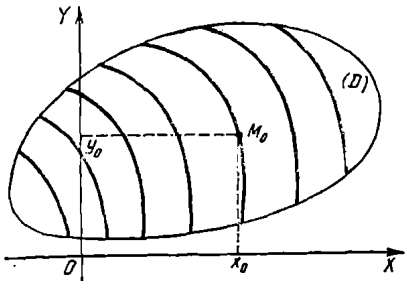



Рис. 8.3

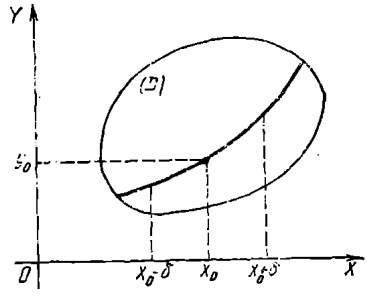



Рис. 8.4

Уравнение $y' = f(x, y)$ имеет бесконечное число решений. Чтобы из этого множества решений выделить одно, так называемое *частное решение*, надо задать некоторые дополнительные условия. Таким условием, определяющим частное решение, является *начальное условие*, или *условие Коши*

$$y(x_0) = y_0, \ (x_0, y_0) \in D. \tag{8.17}$$

Задача отыскания частного решения уравнения (8.14), удовлетворяющего начальному условию (8.17), называется *задачей Коши* для этого уравнения.

С геометрической точки зрения задача Коши для дифференциального уравнения (8.14) означает следующее: требуется из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ (рис. 8.3).

Возникает вопрос, при каких условиях существует решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию Коши, и если решение существует, то является ли оно единственным? Ответ на этот вопрос для уравнения (8.14) дает

**Теорема 8.1** (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть функция $f(x, y)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\partial f/\partial y$ в области $D$. Тогда найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на котором существует единственное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ (рис. 8.4).

Доказательство теоремы опускаем. Сделаем лишь несколько замечаний. Единственность решения задачи Коши понимается в таком смысле: если условия теоремы выполнены и имеются два решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, такие, что $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$, то существует интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в каждой точке

которого $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$. Теорема 8.1 имеет локальный характер: она гарантирует существование решения и единственность его лишь на некотором интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Если условия теоремы 8.1 не выполнены, то через точку $(x_0, y_0) \in D$ может проходить не одна, а несколько интегральных кривых дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$.

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение $y' = \sqrt[3]{y}$. При $y \neq 0$ имеем

$$\left(y'=\sqrt[3]{y}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{y'}{\sqrt[3]{y}}=1\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}\right)'=1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}=x+C\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{8}{27}(x+C)^3}.$$

Итак, все решения уравнения $y' = \sqrt[3]{y}$ даются формулой $y = \pm \sqrt{\frac{8(x+C)^3}{27}}$, где $C$ — произвольная постоянная. Интегральные кривые уравнения $y' = \sqrt[3]{y}$ изображены на рис. 8.5. На оси $X$ единственность решения нарушается, так как через каждую точку $(x_0, 0)$ проходят интегральные кривые $y = \pm \sqrt{\frac{8(x+C_0)^3}{27}}$ и $y \equiv 0$, где $C_0 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y_0^2} - x_0$. Причиной нарушения единственности является то, что $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \to \infty$ при $y \to 0$.

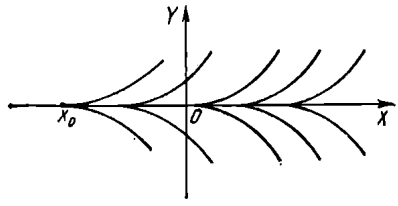



Рис. 8.5

**Общее и частное решения дифференциального уравнения.** Часто в теории дифференциальных уравнений вводятся понятия общего и частного решений уравнений.

*Общим решением* дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ в некоторой области $D$ существования и единственности решения задачи Коши называется семейство функций вида $y=\varphi(x, C)$, зависящее от параметра $C$ и удовлетворяющее условиям:

1°. Функции $y=\varphi(x, C)$ являются решением уравнения $y'=f(x, y)$ при любом допустимом значении параметра $C$;

2°. При любом начальном условии $y(x_0)=y_0$, $(x_0, y_0) \in D$, можно указать параметр $C_0$, такой, что функция $y=\varphi(x, C_0)$ удовлетворяет условию $\varphi(x_0, C_0)=y_0$.

*Частным решением* дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ называется решение, получаемое из общего решения при конкретном значении параметра $C$. Частное решение дифференциального уравнения определяется задачей Коши для этого уравнения.

Часто общее решение дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ находится в виде

$$\Phi(x, y, C)=0 \qquad (8.18)$$

и называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

При фиксированном значении $C=C_0$ общий интеграл (8.18) превращается в *частный интеграл* $\Phi(x, y, C_0)=0$.

Решение дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$, в каждой точке которого нарушается свойство единственности, т. е. через каждую его точку $(x_0, y_0)$ проходит еще и другое решение этого уравнения, называется *особым*. Об особых решениях речь будет идти более подробно в § 8.2.

**Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Метод изоклин.** Из уравнения $y'=f(x, y)$ следует, что угловой коэффициент $y'$ касательной к интегральной кривой в каждой ее точке $(x, y)\in D$ равен значению функции $f(x, y)$ в этой точке. Таким образом, в каждой точке $(x, y)\in D$ можно указать направление касательной к интегральной кривой, проходящей через точку $(x, y)$. Поэтому, если через каждую точку $(x, y)$ провести отрезок с угловым коэффициентом $k=f(x, y)$, то получим так называемое *поле направлений* в области $D$ (рис. 8.6).

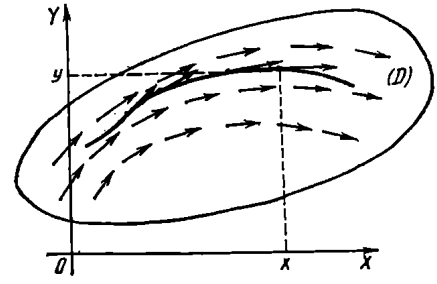


Рис. 8.6

Итак, с геометрической точки зрения дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ определяет в области $D$ плоскости $XY$ поле направлений, а решению этого уравнения соответствует кривая, направление касательной к которой в каждой ее точке совпадает с направлением поля в этой точке. Следовательно, задача интегрирования дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ состоит в нахождении такой кривой, касательная к которой имеет направление, совпадающее с направлением поля в этой точке. Эта задача часто решается приближенно (графически) *методом изоклин.*

*Изоклиной* дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ называется кривая, в каждой точке которой поле направлений имеет один и тот же наклон. Таким образом, семейство изоклин дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ определяется равенством $f(x, y)=k=\operatorname{tg}\alpha$, где $k$ — параметр; $\alpha$ — угол наклона поля направлений к оси $X$. Придавая параметру $k$ близкие числовые значения, можно получить сеть изоклин, с помощью которых приближенно строятся интегральные кривые дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$.

**Пример 5.** Методом изоклин приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$.

□ Полагая $y'=k$, $k$ — const, получаем, что изоклинами являются прямые $y=\dfrac{k-1}{k+1}x$, проходящие через начало координат.

При $k=1$ ($\alpha=45°$) имеем изоклину $y=0$; при $k=0$ ($\alpha=0°$) — изоклину $y=-x$; при $k=-1$ ($\alpha=135°$) получаем изоклину $x=0$, т. е. ось $Y$; при $k=\infty$ ($\alpha=90°$) изоклиной служит прямая $y=x$, во всех точках которой интегральные кривые имеют вертикальные касательные.

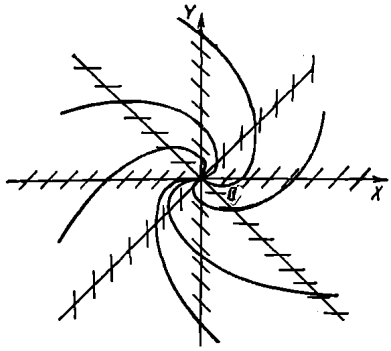


Рис. 8.7

С помощью полученных изоклин строим интегральные кривые данного дифференциального уравнения (рис. 8.7).

**Задачи и упражнения**

1. Показать, что функция $y=2+C\sqrt{1-x^2}$ является решением дифференциального уравнения $(1-x^2)y'+xy=2x$.

2. Выделить области, в которых дифференциальное уравнение имеет единственное решение:

а) $y'=\sqrt{1-y^2}$; б) $y'=\sqrt{x-y}$; в) $y'=x/y$.

3. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения $y'=(y-1)^2$.

## 8.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.** Переходим к изучению типов дифференциальных уравнений первого порядка, для которых известны способы нахождения их решений или интегралов. Одним из таких типов являются уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)\,dx+M_2(x)N_2(y)\,dy=0 \tag{8.19}$$

называется *дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными* в симметричной форме. Часто уравнением с разделяющимися переменными называют уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\,g(y). \tag{8.20}$$

Будем рассматривать уравнения (8.19). Пусть $(a, b)$ и $(c, d)$ — интервалы, на которых определены функции $M_1(x)$, $M_2(x)$ и $N_1(y)$, $N_2(y)$ соответственно. Если $M_2(x)\neq 0$, $\forall x\in(a, b)$, и $N_1(y)\neq 0$, $\forall y\in(c, d)$, то из равенства (8.19) получаем уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy=0, \tag{8.21}$$

которое называется дифференциальным уравнением *с разделенными переменными.* Используя свойство инвариантности дифференциала, проинтегрируем равенство (8.21). В результате получим соотношение

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy=C, \tag{8.22}$$

являющееся общим интегралом дифференциального уравнения (8.19).

В тех точках, где $M_2(x)=0$ или $N_1(y)=0$, могут появиться другие решения уравнения (8.19). В самом деле, если $x=x_1$ — корень

уравнения $M_2(x)=0$, то, положив в соотношении (8.19) значение $x=x_1$, получим тождество

$$M_1(x_1)N_1(y)\,dx_1+M_2(x_1)N_2(y)\,dy\equiv 0,$$

поскольку $dx_1=0$ и $M_2(x_1)=0$. Следовательно, $x=x_1$ — решение уравнения (8.19). Аналогично, если $y_1$ — корень уравнения $N_1(y)=0$, то $y=y_1$ — решение уравнения (8.19).

**Пример 1.** Проинтегрировать уравнение

$$(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0. \tag{8.23}$$

□ Преобразуем уравнение к виду

$$y^2(x+1)dx+x^2(1-y)dy=0.$$

Разделив обе части этого равенства на произведение $x^2y^2$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{x+1}{x^2}\,dx+\frac{1-y}{y^2}\,dy=0.$$

Интегрируя его, получаем

$$\int\frac{x+1}{x^2}\,dx+\int\frac{1-y}{y^2}\,dy=C$$

или

$$\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\ln|y|=C.$$

Отсюда окончательно имеем равенство

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right|-\frac{x+y}{xy}=C, \tag{8.24}$$

являющееся общим интегралом дифференциального уравнения (8.23).

Другими решениями, не получающимися из общего интеграла (8.24) ни при каком значении константы $C$, являются функции $x=0$ и $y=0$.

**Пример 2.** Найти частное решение уравнения

$$x+xy+yy'(1+x)=0, \tag{8.25}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(0)=0. \tag{8.26}$$

□ Разделив переменные в равенстве (8.25), получим

$$\frac{x}{1+x}\,dx+\frac{y}{1+y}\,dy=0.$$

Отсюда интегрированием получаем соотношение

$$x+y-\ln|(x+1)(y+1)|=C. \tag{8.27}$$

Используя начальное условие (8.26), из равенства (8.27) находим, что $C=0$, т. е. соотношение $x+y-\ln|(x+1)(y+1)|=0$ является частным интегралом уравнения (8.25).

**Пример 3.** Проинтегрировать уравнение

$$xdy-2ydx=0. \tag{8.28}$$

□ Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\left(\int\frac{dy}{2y}-\int\frac{dx}{x}=0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\ln|y|-\ln|x|=\ln C\right)$$

(в этом примере константу удобно выбрать в виде $\ln C$.) Отсюда получаем соотношение $y/x^2=C$, являющееся общим интегралом уравнения (8.28). Кроме него, решениями этого уравнения являются функции $x=0$ и $y=0$. Они могут быть формально получены из общего интеграла при $C\to+\infty$ и $C\to+0$.

К уравнениям с разделяющимися переменными сводятся уравнения вида

$$y'=f(ax+by+c). \tag{8.29}$$

В самом деле, введем замену $ax+by+c=u$, где $u=u(x)$, поскольку $y=y(x)$. Отсюда при $b\neq 0$ получаем $y=\dfrac{u-ax-c}{b}$ и $y'=\dfrac{1}{b}u'-\dfrac{a}{b}$. В результате такой замены уравнение (8.29) сводится к уравнению

$$\left(\frac{1}{b}u'-\frac{a}{b}=f(u)\right)\Leftrightarrow\left(\frac{du}{dx}=bf(u)+a\right),$$

являющемуся уже уравнением с разделяющимися переменными. При $b=0$ получаем уравнение $y'=f(ax+c)$. Его решение имеет вид $y=\int f(ax+c)\,dx+C$.

**Пример 4.** Решить уравнение $y'=(2x+3y-5)^2$.

□ Вводим замену $2x+3y-5=u$, $y'=(u'-2)/3$. В итоге приходим к уравнению

$$\left(\frac{1}{3}\frac{du}{dx}=\frac{2}{3}+u^2\right)\Leftrightarrow\left(\frac{du}{dx}=3u^2+2\right)\Leftrightarrow\left(\int\frac{du}{3u^2+2}=\int dx\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}u=x+C\right).$$

Подставляя сюда значение $u$, окончательно находим общий интеграл в виде

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{3}{2}}(2x+3y-5)\right]=x+C.$$

**Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.** Введем следующее определение.

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией порядка $\alpha$ относительно переменных $x$ и $y$, если при любом допустимом $t\in\mathbf{R}$

$$f(tx, ty)=t^{\alpha}f(x, y). \tag{8.30}$$

Например, функция $f(x, y)=3x^2y-x^3+xy^2$ является однородной функцией третьего порядка, так как $f(tx, ty)=t^3(3x^2y-x^3+xy^2)=$ $=t^3f(x, y)$. Функция $f(x, y)=\dfrac{\sqrt{3x^2-y^2}+y}{x-y}$ является однородной нулевого порядка, ибо

$$f(tx, ty)=\frac{\sqrt{3t^2x^2-t^2y^2}+ty}{tx-ty}=t^0\frac{\sqrt{3x^2-y^2}+y}{x-y}=t^0f(x, y).$$

Уравнение

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0, \tag{8.31}$$

в котором функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными одного и того же порядка, называется *однородным дифференциальным уравнением*. В частности, уравнение $y'=f(x, y)$ является однородным, если функция $f(x, y)$ — однородная нулевого порядка.

Умножим обе части уравнения (8.31) на $t^{\alpha}=1/x^{\alpha}$, $x\neq 0$. Получим

$$(1/x^{\alpha})P(x,\ y)dx+(1/x^{\alpha})Q(x,\ y)dy=0. \tag{8.32}$$

Так как по условию $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ — однородные функции порядка $\alpha$, имеем

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}P(x,\ y)=P\left(\frac{1}{x}\,x,\ \frac{1}{x}\,y\right)=P\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=P_1\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}Q(x,\ y)=Q\left(\frac{1}{x}\,x,\ \frac{1}{x}\,y\right)=Q\left(1,\ \frac{y}{x}\right)=Q_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Таким образом, если $P$ и $Q$ — однородные функции порядка $\alpha$, то делением обеих своих частей на $x^{\alpha}$ уравнение (8.31) всегда приводится к виду

$$P_1\left(\frac{y}{x}\right)dx+Q_1\left(\frac{y}{x}\right)dy=0. \tag{8.33}$$

Покажем, что подстановка

$$(u=y/x)\Leftrightarrow(y=ux),\ u=u(x), \tag{8.34}$$

приводит уравнение (8.33) к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, подставляя $y=ux$ и $dy=udx+xdu$ в уравнение (8.33), получаем

$$P_1(u)dx+Q_1(u)\,(udx+xdu)=0$$

или

$$[P_1(u)+uQ_1(u)]dx+xQ_1(u)du=0.$$

Полученное соотношение является уравнением с разделяющимися переменными.

**Пример 5.** Проинтегрировать уравнение

$$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0. \tag{8.35}$$

□ В данном уравнении функции $P(x,\ y)=y+\sqrt{x^2+y^2}$ и $Q(x,\ y)=-x$ являются однородными первого порядка. Разделив уравнение (8.35) на $x\neq 0$, получим

$$\left[\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right]dx-dy=0.$$

Вводим замену $y=ux$, $dy=udx+xdu$. В итоге последнее уравнение приобретает вид

$$\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)dx-(udx+xdu)=0$$

или

$$\sqrt{1+u^2}\,dx-xdu=0. \tag{8.36}$$

Уравнение (8.36) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя их, получаем

$$\left(\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}\right)\Leftrightarrow\left(\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dx}{x}\right)\Leftrightarrow\left(\ln|u+\sqrt{1+u^2}|=\ln|x|+\ln C\right),$$

т. е. $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$. Подставив сюда $u=y/x$, находим общий интеграл исходного уравнения (8.35) в виде

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=Cx\right)\Leftrightarrow\left(y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2\right). \tag{8.37}$$

При делении уравнения (8.35) на $x$ мы могли потерять решение $x=0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=0$ также является решением этого уравнения.

Иногда однородное дифференциальное уравнение удобно интегрировать, считая $x$ функцией от $y$, т. е. $x=x(y)$. Для таких уравнений вводится замена $x=uy$, $u=u(y)$. Тогда $dx=udy+ydu$.

**Пример 6.** Проинтегрировать уравнение

$$\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)y'=y. \tag{8.38}$$

□ Легко убедиться, что данное уравнение однородное. Считая, что $x=x(y)$, сводим его к виду $x+\sqrt{x^2+y^2}=yx'$, где $x'=dx/dy$, или

$$x/y+\sqrt{1+(x/y)^2}=x',\ y\neq 0. \tag{8.39}$$

Вводим замену $x/y=u$, $x=uy$, $x'=u'y+u$. Тогда

$$\left(u+\sqrt{1+u^2}=u'y+u\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{1+u^2}=\frac{du}{dy}y\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dy}{y}\right)\Leftrightarrow\left(\ln\left|u+\sqrt{1+y^2}\right|\right)=\ln|y|+\ln C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(u+\sqrt{1+u^2}+Cy\right).$$

Возвращаясь теперь к первоначальным переменным $x$ и $y$, находим общий интеграл уравнения (8.38) в виде $x+\sqrt{x^2+y^2}=Cy^2$.

К однородным уравнениям сводятся уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right). \tag{8.40}$$

Действительно, введем новые переменные $t$ и $s$ вместо $x$ и $y$ по формулам

$$x=t+\alpha,\ y=s+\beta, \tag{8.41}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — некоторые числа.

Тогда $dx=dt$, $dy=ds$, $y'=dy/dx=ds/dt$, и в результате уравнение (8.40) принимает вид

$$\frac{ds}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1s+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a_2t+b_2s+a_2\alpha+b_2\beta+c_2}\right). \tag{8.42}$$

Числа $\alpha$ и $\beta$ подберем так, чтобы уравнение (8.42) стало однородным. Для этого достаточно потребовать выполнения системы равенств

$$\left.\begin{aligned}a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0;\\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{8.43}$$

Если определитель $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, то система (8.43) имеет единственное решение $\alpha$ и $\beta$, при котором уравнение (8.42) становится однородным вида

$$\frac{ds}{dt}=f\left(\frac{a_1t+b_1s}{a_2t+b_2s}\right)=f\left(\frac{a_1+b_1\dfrac{s}{t}}{a_2+b_2\dfrac{s}{t}}\right)=f_1\left(\frac{s}{t}\right).$$

Заменой $s/t=u$, $u=u(t)$, это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Если же $\frac{a_1}{b_1}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, то, положив $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$, получим $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$, и исходное уравнение (8.40) принимает вид

$$y'=f\left[\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right]=\varphi(a_2x+b_2y).$$

Подстановкой $a_2x+b_2y=u$, $u=u(x)$, это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Если же $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$, то правая часть исходного уравнения (8.40) есть величина постоянная, т. е. имеем

$$(y'=f(k))\Rightarrow(y=f(k)\cdot x+C).$$

**Пример 7.** Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{-x+y+1}. \tag{8.44}$$

□ Вводим замену $x=t+\alpha$, $y=s+\beta$. Тогда

$$\frac{ds}{dt}=\frac{t+s+(\alpha+\beta-3)}{-t+s+(\beta-\alpha+1)}.$$

Составляем систему (8.43):

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta-3=0;\\-\alpha+\beta+1=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\alpha=2;\\\beta=1.\end{aligned}\right.$$

Таким образом, $x=t+2$, $y=s+1$, и исходное уравнение приобретает вид

$$\frac{ds}{dt}=\frac{t+s}{-t+s}=\frac{1+s/t}{-1+s/t}. \tag{8.45}$$

Вводим замену $s/t=u$, $s=ut$, $ds/dt=t(du/dt)+u$. Тогда уравнение (8.45) преобразуется следующим образом:

$$\left(t\frac{du}{dt}+u=\frac{1+u}{-1+u}\right)\Leftrightarrow\left(t\frac{du}{dt}=\frac{1+u}{u-1}-u\right)\Leftrightarrow\left(t\frac{du}{dt}=\frac{1+2u-u^2}{u-1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\int\frac{(u-1)\,du}{1+2u-u^2}=\int\frac{dt}{t}\right)\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}\ln|1+2u-u^2|=\right.$$

$$\left.=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln C\right)\Rightarrow(t^2(1+2u-u^2)=C).$$

Подставив сюда $u=s/t$, получим $t^2+2st-s^2=C$. Возвращаясь к первоначальным переменным $x$ и $y$ ($t=x-2$, $s=y-1$), находим искомый общий интеграл уравнения (8.44) в виде

$$(x-2)^2+2(x-2)(y-1)-(y-1)^2=C.$$

**Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.** Уравнение

$$y'+p(x)y=f(x), \tag{8.46}$$

линейное относительно неизвестной функции $y$ и ее производной $y'$, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Здесь $p(x)$ и $f(x)$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \tag{8.47}$$

называется *однородным линейным уравнением*. Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (8.46) называется *неоднородным*.

Для линейных дифференциальных уравнений (8.46) имеет место

**Теорема 8. 2.** Если функции $p(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то на нем существует единственное решение уравнения (8.46), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, где $a < x_0 < b$, $-\infty < y_0 < +\infty$.

Существуст несколько методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Метод подстановки (Бернулли)*. По этому методу искомое решение уравнения (8.46) ищется в виде

$$y = u(x)v(x), \tag{8.48}$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые на интервале $(a, b)$ функции. Подставляя $y = uv$ и производную $y' = u'v + v'u$ в уравнение (8.46), получаем

$$uv' + u'v + p(x)uv = f(x)$$

или

$$uv' + v[u' + p(x)u] = f(x). \tag{8.49}$$

В качестве функции $u = u(x)$ возьмем решение уравнения

$$u' + p(x)u = 0, \tag{8.50}$$

являющегося уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя в нем переменные, получаем

$$\left(\frac{du}{dx} + p(x)u = 0\right) \Leftrightarrow \left(\int \frac{du}{u} = -\int p(x)\,dx\right) \Leftrightarrow \left(\ln|u| = -\int p(x)\,dx + \right.$$

$$\left. + \ln C_1\right) \Leftrightarrow \left(u = C_1 e^{-\int p(x)dx}\right).$$

Итак, общим решением уравнения (8.50) является функция

$$u(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx}, \tag{8.51}$$

где $C_1$ — постоянная интегрирования. Тогда с учетом равенства (8.50) из соотношения (8.49) получаем, что вторая неизвестная функция $v = v(x)$ должна удовлетворять уравнению $u\,dv/dx = f(x)$. Отсюда

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{u} = \frac{1}{C_1} e^{\int p(x)dx} f(x),$$

т. е.

$$v = v(x) = \frac{1}{C_1}\int f(x)\, e^{\int p(x)dx}dx + C_2, \tag{8.52}$$

где $C_2$ — постоянная интегрирования.

Таким образом, используя равенства (8.51) и (8.52), получаем, что решением $y=u(x)v(x)$ дифференциального уравнения (8.46) является функция

$$y = C_1C_2e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)\,e^{\int p(x)dx}dx = \\ = e^{-\int p(x)dx}\left[C_1C_2 + \int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx\right]. \qquad (8.53)$$

Так как $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, то произведение $C_1C_2$ — тоже произвольная постоянная, которую можно обозначить через $C$. В итоге получаем, что общим решением неоднородного дифференциального уравнения (8.46) является функция

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx\right]. \qquad (8.54)$$

*Замечание.* Поскольку при перемножении функций $u(x)$ и $v(x)$ постоянная интегрирования $C_1$ во втором слагаемом в равенстве (8.53) сократилась, а произведение $C_1C_2$ обозначено новой произвольной постоянной $C$, то в качестве функции $u(x)$ можно взять решение уравнения (8.50) в виде $u(x)=e^{-\int p(x)dx}$ ($C_1=1$). Тогда в равенстве (8.52) можно положить $C_2=C$.

**Пример 8.** Решить уравнение

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}. \qquad (8.55)$$

□ Пусть $y=uv$, тогда $y'=u'v+v'u$, и из уравнения (8.55) имеем

$$(u'v + v'u - 2xuv = 2xe^{x^2}) \Leftrightarrow (u'v + u(v' - 2xv) = 2xe^{x^2}). \qquad (8.56)$$

В качестве функции $v$ возьмем частное решение уравнения $v'-2xv=0$:

$$\left(\frac{dv}{dx} = 2xv\right) \Leftrightarrow (\ln|v| = x^2) \Leftrightarrow (v = e^{x^2}).$$

Подставив функцию $v = e^{x^2}$ в уравнение (8.56), получим

$$\left(\frac{du}{dx}\,e^{x^2} = 2xe^{x^2}\right) \Leftrightarrow (du = 2xdx) \Rightarrow (u = x^2 + C).$$

В итоге находим, что общее решение уравнения (8.55)

$$y = u(x)\,v(x) = (x^2 + C)\,e^{x^2}.$$

2. *Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).* Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения (8.47). Разделив в нем переменные, получим, что решение имеет вид

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \qquad (8.57)$$

где $C$ — произвольная постоянная.

По методу вариации произвольной постоянной общее решение неоднородного дифференциального уравнения (8.46) ищется в виде

$$y = C(x)\,e^{-\int p(x)dx}, \qquad (8.58)$$

в котором $C=C(x)$ есть дифференцируемая функция.

Подставляя функцию (8.58) в уравнение (8.46), получаем

$$C'(x)\,e^{-\int p(x)dx} - p(x)\,C(x)\,e^{-\int p(x)dx} + p(x)\,C(x)\,e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

откуда

$$\left(C'(x)\,e^{-\int p(x)dx} = f(x)\right) \Leftrightarrow \left(C'(x) = f(x)\,e^{\int p(x)dx}\right),$$

так что

$$C(x) = \int e^{\int p(x)dx} f(x)\,dx + C. \tag{8.59}$$

Итак, функция $C(x)$ найдена. Подставляя ее в формулу (8.58), окончательно находим общее решение уравнения (8.46) в виде

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int e^{\int p(x)dx} f(x)\,dx\right],$$

совпадающем с равенством (8.54).

**Пример 9.** Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y' - y/x = -2/x^2, \tag{8.60}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

□ Вначале ищем общее решение однородного уравнения $y' - y/x = 0$. Разделяя переменные, имеем

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow \left(\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}\right) \Rightarrow (y = Cx).$$

В соответствии с методом Лагранжа общее решение уравнения (8.60) ищем в виде $y = C(x)x$, откуда $y' = C'(x)x + C(x)$. Подставляя $y = C(x)x$, $y' = C'(x)x + C(x)$ в уравнение (8.60), получаем

$$(C'(x)x + C(x) - C(x) = -2/x^2) \Leftrightarrow (xC'(x) = -2/x^2).$$

Отсюда находим, что

$$\left(C'(x) = -\frac{2}{x^3}\right) \Rightarrow \left(C(x) = -\int \frac{2dx}{x^3} = \frac{1}{x^2} + C\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (8.60) имеет вид $y = C(x)x = Cx + 1/x$, где $C$ — произвольная постоянная. Из условия $y(1) = 1$ имеем $(C + 1 = 1) \Rightarrow (C = 0)$.

Итак, искомым частным решением уравнения (8.60), удовлетворяющим начальному условию $y(1) = 1$, является функция $y = 1/x$.

3. *Метод интегрирующего множителя.* Для линейного неоднородного уравнения (8.46) попытаемся найти функциональный множитель $\mu = \mu(x) \not\equiv 0$, такой, чтобы после умножения на него обеих частей уравнения в полученном равенстве $\mu y' + \mu p(x) y = \mu f(x)$ левая часть стала производной функции $\mu y$, т. е. чтобы

$$\mu y' + \mu p(x) y = (\mu y)'. \tag{8.61}$$

Из этого равенства имеем

$$\mu y' + \mu p(x) y = \mu' y + \mu y',$$

откуда

$$\mu p(x) y = \mu' y. \tag{8.62}$$

Так как $y \not\equiv 0$, то из равенства (8.62) получаем дифференциальное уравнение

$$\mu'(x) = \mu(x) p(x), \tag{8.63}$$

являющееся уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя их, находим

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \tag{8.64}$$

Мы ограничились частным решением уравнения (8.63), так как достаточно найти хотя бы один множитель $\mu(x)$.

Итак, требуемый множитель $\mu(x)$ найден, он имеет вид (8.64). Умножив на него обе части уравнения (8.46), с учетом равенства (8.61) получим

$$\left(ye^{\int p(x)dx}\right)' = f(x)\, e^{\int p(x)dx}.$$

Отсюда

$$ye^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} f(x)\, dx + C,$$

т. е. функция

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int e^{\int p(x)dx} f(x)\, dx\right]$$

является общим решением уравнения (8.46), полностью совпадающим с функцией (8.54).

Множитель $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ называется *интегрирующим множителем* для линейного дифференциального уравнения (8.46).

**Пример 10.** Методом интегрирующего множителя найти частное решение дифференциального уравнения $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, удовлетворяющее условию $y(1) = 3$.

□ Имеем: $p(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2}$; $f(x) = 1 + x^2$. Тогда

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Умножив исходное уравнение на множитель $\mu(x) = 1/(1+x^2)$, получим

$$\left(\left(\frac{1}{1+x^2}y\right)' = 1\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{1+x^2}y = x + C\right),$$

т. е. $y = (x+C)(1+x^2)$ — общее решение исходного уравнения.

Так как $(y(1) = (C+1)2 = 3) \Leftrightarrow (C = 1/2)$, то решением искомой задачи Коши является функция $y = (x+0{,}5)(x^2+1)$.

**Пример 11.** Решить задачу Коши для уравнения (8.4):

$$L\frac{di}{dt} + Ri = f(t),\ i(t_0) = i_0. \tag{8.65}$$

□ Разделив уравнение (8.65) на $L \neq 0$, получим $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{f(t)}{L}$. Тогда интегрирующий множитель $\mu(t) = e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t}$. Умножив на него обе части последнего уравнения, будем иметь

$$\left(e^{\frac{R}{L}t} i\right)'_t = \frac{1}{L} f(t)\, e^{\frac{R}{L}t},$$

откуда

$$ie^{\frac{R}{L}t} = C + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\, e^{\frac{R}{L}\tau}\, d\tau$$

(в качестве первообразной функции $\frac{1}{L} f(t) e^{(R/L)t}$ взят определенный интеграл с переменным верхним пределом). Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения есть

$$i = i(t) = e^{(-R/L)t}\left(C + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\, e^{(R/L)\tau} d\tau\right).$$

Используя начальные условия $i(t_0) = i_0$, окончательно найдем искомое решение задачи Коши в виде

$$i(t) = e^{(-R/L)t}\left(i_0 + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\, e^{(R/L)\tau} d\tau\right),$$

совпадающем с формулой (8.5) при $t_0 = 0$.

Иногда дифференциальное уравнение является линейным относительно $x$ как функции от $y$. В этом случае оно имеет вид

$$dx/dy + p(y)x = f(y). \tag{8.66}$$

По методу Бернулли решение уравнения (8.66) ищется в виде $x = u(y)v(y)$, а интегрирующий множитель $\mu(y)$ определяется равенством

$$\mu(y) = e^{\int p(y)dy}. \tag{8.67}$$

**Пример 12.** Решить уравнение

$$(2\ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy. \tag{8.68}$$

□ Преобразуем уравнение к виду

$$(2\ln y - \ln^2 y + x)dy = ydx,$$

откуда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2\ln y - \ln^2 y}{y} + \frac{x}{y}$$

или

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = \frac{-\ln^2 y + 2\ln y}{y}, \tag{8.69}$$

т. е. получим уравнение вида (8.66), в котором $p(y) = -1/y$. Интегрирующий множитель, согласно равенству (8.67), имеет вид

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}.$$

Умножая на него уравнение (8.69), получаем

$$\left(x \cdot \frac{1}{y}\right)'_y = \frac{-\ln^2 y + 2\ln y}{y^2} = \left(\frac{\ln^2 y}{y}\right)'_y,$$

т. е. $\frac{x}{y} = \frac{\ln^2 y}{y} + C.$

Отсюда следует, что общим интегралом уравнения (8.68) является соотношение $x=\ln^2 y+Cy$.

**Уравнение Бернулли.** Дифференциальное уравнение

$$y'+p(x)y=f(x)y^{\alpha},\ \alpha\in R, \tag{8.70}$$

называется *уравнением Бернулли*. При $\alpha=0$ оно превращается в линейное дифференциальное уравнение, а при $\alpha=1$ — в уравнение с разделяющимися переменными $y'+[p(x)-f(x)]y=0$. В дальнейшем рассматривается случай, когда $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 1$.

Сведем уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению. Для этого обе части равенства (8.70) разделим на $y^{\alpha}$, $y\neq 0$ ($y=0$ является, очевидно, решением уравнения Бернулли, $\alpha>0$). Имеем

$$y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=f(x). \tag{8.71}$$

Введем замену $y^{1-\alpha}=z$, $z=z(x)$, откуда получаем, что $(1-\alpha)y^{-\alpha}y'=z'$, т. е. $y^{-\alpha}y'=\dfrac{1}{1-\alpha}z'$. В итоге уравнение (8.71) приводится к уравнению

$$\frac{1}{1-\alpha}z'+p(x)z=f(x), \tag{8.72}$$

являющемуся линейным относительно функции $z=z(x)$. Его решение может быть получено одним из трех способов, изложенных выше.

**Пример 13.** Решить уравнение

$$y'-2ye^{x}=2\sqrt{y}\,e^{x}. \tag{8.73}$$

□ Данное уравнение является уравнением Бернулли ($\alpha=1/2$):

$$y'-2e^{x}y=2e^{x}y^{1/2}.$$

Заменой $y^{1/2}=z$ сведем его к уравнению (8.72):

$$\frac{1}{1-1/2}z'-2e^{x}z=2e^{x}$$

или

$$z'-e^{x}z=e^{x}. \tag{8.74}$$

Интегрирующий множитель этого уравнения $\mu(x)=e^{-\int e^{x}dx}=e^{-e^{x}}$. После умножения на него уравнения (8.74) получим

$$\left(ze^{-e^{x}}\right)'=e^{x}e^{-e^{x}}=-\left(e^{-e^{x}}\right)',$$

откуда

$$\left(ze^{-e^{x}}=C-e^{-e^{x}}\right)\Leftrightarrow\left(z=Ce^{e^{x}}-1\right).$$

Возвращаясь к первоначальной функции $y$, получаем общий интеграл уравнения Бернулли (8.73) в виде $\sqrt{y}+1=Ce^{e^{x}}$.

**Уравнения в полных дифференциалах.** Напомним, что полным дифференциалом функции $u=u(x,\ y)$ называется выражение

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{8.75}$$

Получим условие, при котором дифференциальное выражение $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$.

**Теорема 8.3.** Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции, непрерывные в односвязной области $D$ плоскости $XY$, имеющие в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того чтобы дифференциальное выражание

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy \tag{8.76}$$

являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области $D$ было выполнено условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{8.77}$$

□ *Необходимость.* Пусть выражение (8.76) является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т. е. выполнено равенство

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=P(x, y)dx+Q(x, y)dy,$$

справедливое при любых $dx$ и $dy$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y). \tag{8.78}$$

Дифференцируя первое из этих равенств по $y$, а второе — по $x$, имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

откуда по теореме о равенстве смешанных производных получаем $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство достаточности опускаем. Полное доказательство этой теоремы будет приведено в § 12.2, ч. IV. ■

Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены в точке (0, 0) и область $D$ выпукла, то можно проверить, что искомая функция $u(x, y)$, дифференциал которой равен выражению (8.76), определяется равенством

$$u(x, y)=\int_0^1 [P(tx, ty)x+Q(tx, ty)y]\,dt. \tag{8.79}$$

Уравнение

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0 \tag{8.80}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. В этом случае уравнение можно записать в виде $du(x, y)=0$, откуда следует, что соотношение

$$u(x, y)=C \tag{8.81}$$

является его общим интегралом.

**Пример 14.** Решить уравнение

$$\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\frac{x^2}{y^3}\right)dy=0. \tag{8.82}$$

□ В этом уравнении $P(x, y)=xy^2+\frac{x}{y^2}$, а $Q(x, y)=x^2y-\frac{x^2}{y^3}$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy-\frac{2x}{y^3}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то уравнение (8.82) является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y)=xy^2+\frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y)=x^2y-\frac{x^2}{y^3}. \tag{8.83}$$

Из первого равенства получаем

$$u=\int\left(xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx=\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2}{2y^2}+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция от $y$.

Отсюда с учетом второго равенства (8.83) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y-\frac{x^2}{y^3}+\varphi'(y)=x^2y-\frac{x^2}{y^3},$$

т. е. $\varphi'(y)=0$ или $\varphi(y)=C$.

Итак, функция $u(x, y)=\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2}{2y^2}+C$, а общий интеграл уравнения, согласно равенству (8.81), имеет вид $\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2}{2y^2}=C$.

**Пример 15.** Решить задачу Коши для уравнения в полных дифференциалах:

$$(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0,\ y(1)=-1.$$

□ Так как в точке (0, 0) функции $P=3x^2y+2y+3$ и $Q=x^3+2x+3y^2$ непрерывны, то для отыскания функции $u(x, y)$ воспользуемся формулой (8.79). Имеем:

$$u(x, y)=\int_0^1\left[(3t^2x^2ty+2ty+3)x+(t^3x^3+2tx+3t^2y^2)y\right]dt=$$

$$=\int_0^1(4x^3yt^3+4xyt+3y^3t^2+3x)\,dt=$$

$$=(x^3yt^4+2xyt^2+y^3t^3+3xt)\Big|_0^1=x^3y+2xy+y^3+3x.$$

Отсюда получаем общий интеграл $x^3y+2xy+y^3+3x=C$.

Используя начальное условие $y(1)=-1$, находим, что равенство $x^3y+2xy+y^3+3x+1=0$ есть частный интеграл исходной задачи Коши.

**Интегрирующий множитель.** Если $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, то дифференциальное уравнение $Pdx+Qdy=0$ уже не является уравнением в полных дифференциалах. Однако его можно превратить в уравнение в полных дифференциалах умножением обеих частей на подходящим образом подобранную функцию $\mu(x, y)$, которая называется *ин-*

*тегрирующим множителем.* В некоторых частных случаях интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ можно найти.

Умножив уравнение (8.80) на пока еще не определенную функцию $\mu(x, y)$, получим $\mu P dx + \mu Q dy = 0$.

Чтобы это соотношение было уравнением в полных дифференциалах, должно быть выполнено равенство

$$\partial(\mu P)/\partial y = \partial(\mu Q)/\partial x$$

или

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x},$$

т. е. для отыскания множителя $\mu$ имеем дифференциальное уравнение в частных производных

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{8.84}$$

В общем случае уравнение (8.84) решить трудно. В частных случаях, когда множитель $\mu$ имеет специальный вид, уравнение (8.84) удается решить. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть $\mu = \mu(x)$. Тогда $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, и уравнение (8.84) принимает вид

$$\frac{d\mu}{dx} = -\mu\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{8.85}$$

Отсюда следует, что если функция $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ зависит только от $x$, то соотношение (8.85) является уравнением с разделяющимися переменными, решением которого служит функция

$$\mu = \mu(x) = e^{-\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx}. \tag{8.86}$$

В качестве $\mu$ взято частное решение уравнения (8.85), поскольку достаточно найти хотя бы один интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$.

2. Пусть $\mu = \mu(y)$. Тогда $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy}$, $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, и уравнение (8.84) преобразуется к виду

$$\frac{d\mu}{dy} = \mu\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Если функция $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ зависит только от $y$, то, аналогично предыдущему, получаем

$$\mu = \mu(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy}. \tag{8.87}$$

В рассмотренных частных случаях на практике поступают следующим образом. Составляется выражение $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. Затем рассмат-

ривается отношение $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$. Если оно окажется функцией только $x$, то интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$ ищется по формуле (8.86). В противном случае берется отношение $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$, и если оно зависит только от $y$, то множитель $\mu=\mu(y)$ ищется по формуле (8.87).

**Пример 16.** Проинтегрировать уравнение

$$(x^2-y)dx+(x^2y^2+x)dy=0. \tag{8.88}$$

□ В данном случае $P=x^2-y$, $Q=x^2y^2+x$, $P'_y=-1$, $Q'_x=2xy^2+1$. Отсюда следует, что уравнение (8.88) не является уравнением в полных дифференциалах. Составляем разность $Q'_x-P'_y=2xy^2+2=2(xy^2+1)$. Замечаем, что отношение

$$\frac{1}{Q}\left(Q'_x-P'_y\right)=\frac{2(xy^2+1)}{x^2y^2+x}=\frac{2}{x}$$

является функцией только $x$. Поэтому по формуле (8.86) находим

$$\mu=\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}.$$

Умножив теперь уравнение (8.88) на этот множитель, получим соотношение $(1-y/x^2)dx+(y^2+1/x)dy=0$, являющееся уравнением в полных дифференциалах (проверьте это). Решив его, найдем, что общим интегралом уравнения (8.88) является выражение $3x^2+xy^3+3y-Cx=0$.

Заметим, что $x=0$ — решение уравнения (8.88), не получающееся из общего интеграла.

**Пример 17.** Найти условие, при котором уравнение $Pdx+Qdy=0$ допускает интегрирующий множитель $\mu=\mu(xy)$.

□ Воспользуемся равенством (8.84). Учитывая, что $\partial\mu/\partial y=\mu'(xy)x$, $\partial\mu/\partial x=\mu'(xy)y$, перепишем его в виде

$$\mu'(xy)(Px-Qy)=\mu(xy)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

или

$$\mu'(xy)=\frac{Q'_x-P'_y}{xP-yQ}\mu(xy).$$

Отсюда видно, что если функция $\frac{Q'_x-P'_y}{xP-yQ}$ зависит только от произведения $xy$, то искомый интегрирующий множитель $\mu=\mu(xy)$ существует.

**Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка.** Из геометрического смысла дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ следует, что его интегральная кривая в каждой своей точке имеет касательную, совпадающую с направлением поля, порожденного этим уравнением. Отсюда вытекает, что все интегральные кривые дифференциального уравнения (если они существуют), проходящие через данную точку, должны касаться друг друга.

Теперь можно определить особое решение дифференциального уравнения с геометрической точки зрения. Решение дифферен-

циального уравнения $y'=f(x, y)$ называется *особым*, если через любую точку соответствующей ему интегральной кривой проходит, кроме нее, еще и другая, касающаяся ее интегральная кривая данного уравнения.

Кривая, через каждую точку которой проходит хотя бы еще одна кривая некоторого семейства (множества), имеющая ту же касательную в данной точке, что и кривая семейства, называется *огибающей* данного семейства.

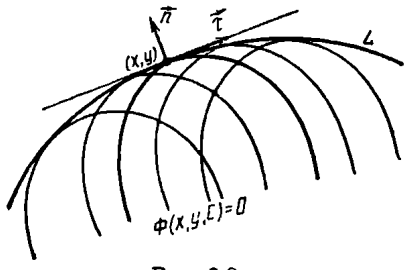


Рис. 8.8

Из сказанного следует, что особое решение дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ является огибающей семейства интегральных кривых $\Phi(x, y, C)=0$ ( общего интеграла) этого уравнения.

Найдем условия, которым удовлетворяет огибающая семейства кривых $\Phi(x, y, C)=0$ уравнения $y'=f(x, y)$.

Пусть $L$ — огибающая семейства $\Phi(x, y, C)=0$ (рис. 8.8), заданная параметрически в виде $x=x(t)$, $y=y(t)$. Тогда вектор $\vec{\tau}=(x'(t), y'(t))$ направлен по касательной к огибающей в данной точке $(x, y)$, а значит, и по касательной к кривой семейства $\Phi(x, y, C)=0$, проходящей через эту точку. Пусть точка $(x, y)$ огибающей принадлежит одновременно и кривой семейства, для которой постоянная $C=C_0$. Тогда вектор $\mathbf{n}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=\operatorname{grad}\Phi$ ортогонален к огибающей в точке $(x, y)$, т. е. $(\mathbf{n}, \vec{\tau})=0$ или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'(t)=0. \tag{8.89}$$

При изменении параметра $t$ точка $(x, y)$ огибающей перемещается по ней, переходя с одной кривой семейства на другую, т. е. постоянная $C$ есть функция $C=C(t)$. Иначе говоря, вдоль огибающей выполнено равенство $\Phi(x(t), y(t), C(t))=0$, откуда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial C}C'(t)=0.$$

Из последнего равенства с учетом соотношения (8.89) получаем $\partial\Phi/\partial C=0$.

Итак, если семейство кривых $\Phi(x, y, C)=0$ имеет огибающую $L$, то должны выполняться два условия:

$$\Phi(x, y, C)=0;\quad \partial\Phi/\partial C=0. \tag{8.90}$$

Кривая, удовлетворяющая системе (8.90), называется *С-дискриминантной кривой*. Условие (8.90) является необходимым условием существования огибающей, т. е. если семейство $\Phi(x, y, C)=0$ имеет огибающую, то ее уравнение задается системой (8.90). Однако если составить систему (8.90) и решить ее, то решение этой

системы не обязательно даст огибающую семейства (оно дает $C$-дискриминантную кривую).

Для примера рассмотрим семейство кривых

$$\Phi(x,\ y,\ C) = (y - C)^2 - \frac{4}{9}x^3 = 0. \tag{8.91}$$

Имеем $\Phi'_C = -2(y - C)$. Тогда из системы

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 0; \\ \Phi'_C &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &(y - C)^2 - \frac{4}{9}x^3 = 0; \\ &-2(y - C) = 0 \end{aligned}\right.$$

находим, что $C$-дискриминантной кривой является кривая $x=0$ (ось $Y$). Покажем, что кривая $x=0$ не является огибающей семейства кривых (8.91). Действительно, $C$-дискриминантная кривая $x=0$ при любом фиксированном $C$ в каждой своей точке имеет касательную, совпадающую с осью $Y$ (в каждой точке этой кривой производная равна бесконечности). Но при этом фиксированном $C$ кривая

$$y = C \pm \frac{2}{3}x^{3/2} \tag{8.92}$$

семейства (8.91) в каждой своей точке имеет производную $y' = \pm\sqrt{x}$, обращающуюся в нуль в точках $C$-дискриминантной кривой $x = 0$.

Таким образом, кривые (8.92) и $C$-дискриминантная кривая $x=0$ не имеют общей касательной, т. е. кривая $x=0$ не является огибающей семейства (8.91).

**Пример 18.** Найти особые решения дифференциального уравнения $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$, $x > 0$, зная его общий интеграл $x^2 = C(y - C)$.

□ Найдем $C$-дискриминантную кривую. Имеем $\Phi(x,\ y,\ C) = C(y-C) - x^2$, так что $\partial\Phi/\partial C = y - 2C = 0$. Отсюда $C = y/2$. Подставив это значение $C$ в общий интеграл, получим

$$\left(x^2 = \frac{y}{2}\left(y - \frac{y}{2}\right)\right) \Leftrightarrow ((y - 2x)(y + 2x) = 0)$$

или $y = \pm 2x$. Итак, $C$-дискриминантная кривая состоит из двух прямых $y_1 = 2x$ и $y_2 = -2x$. Проверим, являются ли эти прямые особыми решениями исходного дифференциального уравнения, т. е. огибающими семейства кривых $\Phi(x,\ y,\ C) = C(y-C) - x^2 = 0$. Для этого достаточно проверить выполнимость равенств $y = y_1$, $y' = y'_1$, где $y = x^2/C + C$ — кривая рассматриваемого семейства. Имеем

$$(y = y_1) \Leftrightarrow (x^2/C + C = 2x) \Rightarrow (C = x).$$

Далее $y' = 2x/C$, $y'_1 = 2$. Отсюда при $C = x$ получаем $y' = y'_1$, т. е. действительно, прямая $y_1 = 2x$ — огибающая рассматриваемого семейства. Аналогично проверяется, что $y_2 = -2x$ тоже является огибающей этого семейства. Таким образом, $y = \pm 2x$ — особые решения исходного дифференциального уравнения.

**Пример 19.** Найти общее и особое решения *уравнения Клеро**

$$y = xy' + \psi(y'). \tag{8.93}$$

□ Введем замену $y' = p$, тогда $y = xp + \psi(p)$. Отсюда $dy = pdx + xdp + \psi'(p)dp$. Так как $dy = pdx$, то из последнего равенства получаем $[x +$

* А. К. Клеро (1713—1765) — французский математик.

$+\psi'(p)]dp=0$, откуда $dp=0$, т. е. $p=y'=C$. Итак, общим решением уравнения Клеро (8.93) является функция

$$(y=xC+\psi(C))\Leftrightarrow(Cx+\psi(C)-y=0), \tag{8.94}$$

полученная формальной заменой в уравнении (8.93) $y'$ на $C$.

Из системы

$$\left.\begin{aligned}\Phi&=0;\\ \Phi'_C&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}Cx+\psi(C)-y=0;\\ x+\psi'(C)=0,\end{cases}$$

определяющей $C$-дискриминантную кривую семейства (8.94), находим

$$\left.\begin{aligned}x&=-\psi'(C);\\ y&=-C\varphi'(C)+\psi(C).\end{aligned}\right\} \tag{8.95}$$

Проверим, что параметрически заданная $C$-дискриминантная кривая (8.95) (параметром служит $C$) является особым решением уравнения Клеро. Действительно, так как в точках кривой (8.95)

$$y'_x=\frac{y'_C}{x'_C}=\frac{-\psi'(C)-C\psi''(C)+\psi'(C)}{-\psi''(C)}=C$$

и производная общего решения $y'_x=C$, то отсюда заключаем, что $C$-дискриминантная кривая (8.95) является огибающей семейства (8.94).

Итак, решение (8.95) — особое для уравнения Клеро (8.93).

### Задачи и упражнения

1. Доказать, что кривая, угловой коэффициент касательной которой пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

2. Найти решение уравнения $x^2y'+\sin 2y=1$, удовлетворяющее условию $y\longrightarrow 11\pi/4$ при $x\longrightarrow\infty$.

3. Найти общий интеграл уравнения $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{\varphi(y/x)}{\varphi'(y/x)}$.

4. Пусть $y_1$ и $y_2$ — два различных решения уравнения $y'+p(x)y=f(x)$. Доказать, что $y=y_1+C(y_2-y_1)$ является общим решением того же уравнения.

5. Точка массой $m$ движется прямолинейно под действием силы, пропорциональной кубу времени, протекшего с момента, когда скорость была $v_0$ (коэффициент пропорциональности равен $k$). Кроме того, на точку действует сила сопротивления среды, пропорциональная произведению скорости и времени с коэффициентом пропорциональности $k_1$. Найти зависимость скорости от времени.

6. Подходящей заменой уравнение $yy'\sin x=\cos x(\sin x-y^2)$ свести к линейному и найти его общий интеграл.

7. Общее решение уравнения $y'=p(x)y$ имеет вид $y=Ce^{\int p(x)dx}$, где $|C|<+\infty$, $p(x)$ — непрерывная на интервале $(a, b)$ функция. Это решение при $C\neq 0$ не пересекает ось $X$. Однако уравнение $y'=y/x$ имеет общее решение $y=Cx$, пересекающее ось $X$ для всех $C$. Не противоречит ли это высказанному выше утверждению?

8. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0.$$

9. Найти интегрирующий множитель и общий интеграл уравнений:

а) $(x^2+y)\,dx-x\,dy=0$; б) $2xy\ln y\,dx+(x^2+y^2\sqrt{y^2+1})\,dy=0$.

10. Найти условие, при котором уравнение $P\,dx+Q\,dy=0$ допускает интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x+y)$.

11. Решить уравнение Бернулли $(x^3+e^y)y'=3x^2$.

12. Найти особые решения уравнений:

а) $y'^2=4y$; б) $y'^3=y^2$; в) $y=xy'+a\sqrt{1+y'^2}$.

## 8.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

**Общие понятия. Задача Коши.** Уравнение вида $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0$, где $n>1$, называется *дифференциальным уравнением n-го порядка*. Уравнение

$$y^{(n)}=f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{8.96}$$

называется *уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной* $y^{(n)}$. Всякому решению дифференциального уравнения (8.10) или (8.96) (как и уравнению первого порядка $F(x, y, y')=0$ или $y'=f(x, y)$) на плоскости $XY$ соответствует интегральная кривая (8.12). Общее решение дифференциального уравнения $n$-го порядка зависит от $n$ произвольных постоянных $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$. Оно имеет вид $y=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, где $\varphi$ — $n$ раз непрерывно дифференцируемая функция. Если решение дифференциального уравнения (8.10) или (8.96) удается получить в неявном виде $\Phi(x, C_1, C_2, ..., C_n)=0$, то оно называется *общим интегралом* этого уравнения.

Геометрически общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения (8.10) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости $XY$, зависящее от $n$ параметров $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$. Для выделения конкретного (частного) решения из общего необходимо иметь, помимо дифференциального уравнения, некоторые дополнительные условия, позволяющие определить значения произвольных постоянных $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$. Одним из таких условий является задание значений функций и ее первых $n-1$ производных в некоторой точке $x_0$ интервала $(a, b)$, на котором определено решение уравнения, т. е. условий вида

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{8.97}$$

где $y_0$, $y_0'$, $y_0''$, ..., $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа. Условия (8.97) называются *начальными условиями* или *условиями Коши* для уравнения (8.10) или (8.96).

Задача отыскания частного решения уравнения (8.10), удовлетворяющего системе начальных условий (8.97), называется *задачей Коши* для этого уравнения.

**Пример 1.** Решить задачу Коши: $\ddot{x}+a\dot{x}=g$, $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=v_0$.

Решением сформулированной задачи Коши является функция (8.9) примера 3, § 8.1.

**Теорема 8.4** (о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (8.96)). Пусть дано дифференциальное уравнение (8.96) и система начальных условий (8.97). Если функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ непрерывна в окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то существует единственное решение урав-

нения, определенное в некотором интервале $(a, b)$, содержащем точку $x_0$, и удовлетворяющее заданной системе начальных условий.

**Уравнения, допускающие понижение порядка.** Задача интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков является значительно более сложной, чем задача интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Одним из основных методов интегрирования уравнений высших порядков является понижение порядка уравнения, т. е. сведение его с помощью соответствующей замены к дифференциальному уравнению более низкого порядка.

Рассмотрим некоторые типы уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида

$$y^{(n)}=f(x). \tag{8.98}$$

Порядок этого уравнения понижается всякий раз на единицу путем последовательного интегрирования:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1,$$
$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\,dx\right) dx + C_1 x + C_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Заметим, что задача интегрирования уравнения (8.98) является задачей отыскания первообразной $n$-го порядка для функции $f(x)$. Решение этой задачи, согласно формуле (5.68), ч. II, сводится к виду

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f(t)\,dt + P_{n-1}(x), \tag{8.99}$$

где $P_{n-1}(x) = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$.

**Пример 2.** Решить уравнение $y'''=\sin x+x$.

□ Последовательно интегрируя, находим

$$y'' = \int (\sin x + x)\,dx = -\cos x + x^2/2 + C_1;$$
$$y' = -\sin x + x^3/6 + C_1x + C_2; \tag{8.100}$$
$$y = \cos x + x^4/24 + C_1x^2/2 + C_2x + C_3.$$

По формуле (8.99) имеем

$$y=\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2(\sin t + t)\,dt + C_1'x^2 + C_2'x + C_3',$$

где $C_1'$, $C_2'$, $C_3'$ — произвольные постоянные. Вычисляя этот интеграл интегрированием по частям, получаем формулу

$$y = \cos x + \frac{x^4}{24} + \left(C_1' + \frac{\cos x_0}{2} - \frac{x_0}{4}\right)x^2 +$$
$$+\left(C_2' + \frac{x_0^3}{3} - x_0\cos x_0 + \sin x_0\right)x + \left(C_3' - \frac{x_0^4}{8} + \frac{x_0^2}{2}\cos x_0 - \cos x_0\right),$$

совпадающую с формулой (8.100) с точностью до обозначения постоянных.

2. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно искомой функции $y$ и ее первых производных до порядка $k-1$ включительно, т. е. уравнения вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{8.101}$$

Введем новую неизвестную функцию $z = y^{(k)}$, где $z = z(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = z'$, $y^{(k+2)} = z''$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$ и уравнение (8.100) сводится к уравнению $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$, порядок которого $n-k$. Решив его, найдем функцию $z(x) = y^{(k)}$, т. е. получим уравнение типа (8.98), вопрос об интегрировании которого разобран в п. 1.

**Пример 3.** Проинтегрировать уравнение

$$xy''' - y'' = x^2 + 1. \tag{8.102}$$

□ Введем замену $y'' = z$, где $z = z(x)$. Тогда $y''' = z'$, и уравнение (8.102) сводится к линейному уравнению $xz' - z = x^2 + 1$ или $z' - \frac{1}{x} z = x + \frac{1}{x}$. Так как здесь $p(x) = -1/x$, то интегрирующий множитель $\mu = e^{\int p(x)\,dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$. Умножая последнее уравнение на этот множитель, получаем

$$\left(\left(z \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow \left(z \frac{1}{x} = \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx + C_1\right),$$

т. е.

$$z = x\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_1 x = x^2 - 1 + C_1 x = y''.$$

Отсюда

$$\left(y' = \frac{x^3}{3} - x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2\right) \Rightarrow \left(y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3\right).$$

3. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно независимой переменной $x$, т. е. уравнения вида

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{8.103}$$

Покажем, что замена $y' = p$, где $p = p(y)$, понижает порядок уравнения (8.103) на единицу. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = p = p(y);\\
y'' &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p;\\
y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(p \frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p \frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p \frac{d^2p}{dy^2}\right] p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{8.104}$$

В правой части каждого из этих равенств максимальный порядок производных функций $p$ на единицу меньше порядка производной функции $y$ в левой части того же равенства. Подставив значения производных (8.104) в уравнение (8.103), придем к дифференциальному уравнению вида $\Phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{(n-1)}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$, порядок которого на единицу меньше порядка исходного уравнения (8.103).

**Пример 4.** Решить задачу Коши:

$$y''=2yy',\ y(0)=y'(0)=1. \tag{8.105}$$

□ Введем замену $y'=p=p(y)$, тогда $y''=pdp/dy$. В результате уравнени (8.105) приобретает вид $pdp/dy=2py$. Отсюда или $p=0$, или $dp/dy=2y$. В пер вом случае $(p=0)\Leftrightarrow(y'=0)$, т. е. $y=C$. Но это решение, как нетрудно видеть, н удовлетворяет начальным условиям. Во втором случае

$$(dp/dy=2y)\Leftrightarrow(dp=2ydy)\Leftrightarrow(p=y^2+C_1),$$

т. е. $y'=y^2+C_1$. Из начального условия $y'(0)=1$ получаем $C_1=0$, так чт $y'=y^2$ или $dy/dx=y^2$. Разделяя в этом уравнении переменные, будем имет $(-1/y=x+C_2)\Leftrightarrow(y=-1/(x+C_2))$. Из начального условия $y(0)=1$ находим, чт $C_2=-1$. Таким образом, искомое решение задачи Коши (8.105) есть функци $y=1/(1-x)$.

**Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений** Кроме задачи Коши, важными в теории дифференциальных уравне ний являются *краевые задачи*, в которых условия, наложенные н решение, задаются не в одной точке $x_0\in[a,\ b]$, как в случае задач Коши, а на концах отрезка $[a,\ b]$, внутри которого и ищется искомо решение. Геометрически в краевых задачах речь идет об отыскани интегральной кривой дифференциального уравнения, концы кото рой находятся в точках с абсциссами $a$ и $b$.

Пусть, например, $y=y(x)$ является интегральной кривой некото рого дифференциального уравнения второго порядка. Тогда дл него простейшие *краевые (граничные) условия* имеют вид $y(a)=A$ $y(b)=B$, где $A$ и $B$ — заданные числа. Более общими граничными условиями являются соотношения

$$\left.\begin{aligned}\alpha y(a)+\alpha_1 y'(a)=A;\\ \beta y(b)+\beta_1 y'(b)=B,\end{aligned}\right\}$$

связывающие значения искомой функции $y(x)$ и ее производно $y'(x)$ в точках $a$ и $b$. Здесь $\alpha$, $\alpha_1$; $\beta$, $\beta_1$ — заданные действитель ные числа, причем $\alpha^2+\alpha_1^2\neq 0$, $\beta^2+\beta_1^2\neq 0$ (напомним, что нера венство $u^2+v^2\neq 0$ означает, что одновременно $u$ и $v$ не могу быть равными нулю).

Краевая задача может иметь единственное решение, либо бес численное множество решений, либо вообще не иметь их.

**Пример 5.** Решить краевую задачу

$$y''+y=0,\ y(0)=0,\ y(\pi)=1. \tag{8.106}$$

□ Решением дифференциального уравнения (8.106) является функция $y_1=$ $=C_1\cos x+C_2\sin x$, $\forall\ C_1,\ C_2\in\mathbf{R}$. Из краевых условий получаем систему

$$\left.\begin{aligned}C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0;\\ C_1\cdot(-1)+C_2\cdot 0=1,\end{aligned}\right\}$$

которая несовместна. Следовательно, краевая задача (8.106) не имеет решени

**Пример 6.** Найти решение уравнения $y''+y=0$ при условиях $y(0)=y(\pi)=$

□ Решение $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ этого уравнения и условия $y(0)=y(\pi)=$ приводят к системе

$$\left.\begin{aligned}C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=0;\\ C_1\cdot(-1)+C_2\cdot 0=0,\end{aligned}\right\}$$

из которой следует, что искомая краевая задача имеет бесчисленное множество решений $y=C_2\sin x$ при любых $C_2\in\mathbf{R}$.

**Пример 7.** Решить краевую задачу $y''=6x$, $y(0)=0$, $y'(1)=0$.

□ Последовательно интегрируя уравнение, имеем $y=x^3+C_1x+C_2$. Из краевых условий находим, что искомым (единственным) решением является функция $y=x^3-3x$. Таким образом, найдена единственная интегральная кривая, левый конец которой расположен в начале координат, а правый — в точке прямой $x=1$, где касательная к этой кривой параллельна оси $X$.

### Задачи и упражнения

1. Решить задачу Коши:
$$y'''=6/x^3,\ y(1)=2,\ y'(1)=1,\ y''(1)=1.$$
2. Проинтегрировать уравнение $(1+x^2)\,y''+y'^2+1=0$.
3. Решить задачу Коши: $y^3y''=1$, $y(-2)=1$, $y'(-2)=-1$.
4. Решить краевую задачу: $y''-2y'+2y=0$, $y(0)=0$, $y'(\pi)=e^{\pi}$.

## 8.4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

**Общие понятия.** Уравнение
$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \tag{8.107}$$
в котором $f(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ — заданные на $[a, b]$ функции, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка*. Если $f(x)\equiv 0$, $\forall\, x\in[a, b]$, то уравнение
$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=0 \tag{8.108}$$
называется *линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка*.

Задача Коши для уравнения (8.107) формулируется следующим образом: найти решение $y=y(x)$ уравнения (8.107), удовлетворяющее начальным условиям
$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \tag{8.109}$$
где $y_0$, $y_0'$, ..., $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа; $x_0\in[a, b]$.

**Теорема 8.5.** Пусть на отрезке $[a, b]$ коэффициенты $a_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, и правая часть $f(x)$ уравнения (8.107) непрерывны. Тогда:

1) решение задачи Коши (8.107), (8.109) существует на всем отрезке $[a, b]$;

2) если два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (8.107) удовлетворяют одним и тем же начальным условиям (8.109), то $y_1(x)\equiv y_2(x)$ при всех $x\in[a, b]$.

*Следствие.* Пусть $y(x)$ — решение линейного однородного дифференциального уравнения (8.108), удовлетворяющее нулевым начальным условиям
$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=0.$$
Тогда $y(x)\equiv 0$ при всех $x\in[a, b]$.

**Линейный дифференциальный оператор и его свойства.** Всюду в дальнейшем предполагается, что коэффициенты $a_0(x) \equiv 1$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ и правая часть $f(x)$ уравнения (8.107) — действительные и непрерывные на $[a, b]$ функции. Обозначим

$$\mathbf{L}[y] = y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y. \quad (8.110)$$

Оператор $\mathbf{L}[y]$ называется *дифференциальным оператором*. С его помощью дифференциальные уравнения (8.107) и (8.108) записываются в виде

$$\mathbf{L}[y] = f(x) \quad (8.111)$$

и

$$\mathbf{L}[y] = 0 \quad (8.112)$$

соответственно.

Покажем, что оператор $\mathbf{L}[y]$ — линейный. Действительно, пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — функции класса $C^{(n)}[a, b]$, а $\alpha$ и $\beta$ — произвольные числа. Тогда из равенства (8.110) имеем

$$\mathbf{L}[\alpha y_1 + \beta y_2] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\left(\alpha y_1^{(n-k)} + \beta y_2^{(n-k)}\right) = \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,y_1^{(n-k)} +$$

$$+ \beta \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,y_2^{(n-k)} = \alpha \mathbf{L}[y_1] + \beta \mathbf{L}[y_2],$$

что и доказывает линейность оператора.

Из линейности оператора $\mathbf{L}[y]$ вытекают следующие его свойства:

1°. Аддитивность, т. е.

$$\mathbf{L}[y_1 + y_2] = \mathbf{L}[y_1] + \mathbf{L}[y_2]. \quad (8.113)$$

2°. Однородность, т. е.

$$\mathbf{L}[Cy] = C\mathbf{L}[y], \quad (8.114)$$

где $C$ — произвольное число.

**Линейные однородные дифференциальные уравнения и свойства их решений.** Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (8.112). Из свойств (8.113) и (8.114) оператора $\mathbf{L}[y]$ следует, что если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями однородного уравнения (8.112), то справедливы следующие утверждения:

1°. Сумма $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение этого уравнения.

2°. Для любой постоянной $C$ и любого решения $y(x)$ уравнения (8.112) произведение $Cy(x)$ тоже есть решение этого уравнения.

3°. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения неоднородного уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$, то их разность $y_1(x) - y_2(x)$ есть решение однородного уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$.

Действительно, $\mathbf{L}[y_1 - y_2] = \mathbf{L}[y_1] - \mathbf{L}[y_2] = f(x) - f(x) = 0$, что и доказывает сформулированное утверждение.

4°. Если комплекснозначная функция $y = u(x) + iv(x)$ является решением однородного уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$, то действительная часть

этого решения $u(x)$ и его мнимая часть $v(x)$ в отдельности — решения этого уравнения.

В самом деле, в силу линейности оператора $\mathbf{L}[y]$ имеем $\mathbf{L}[u+iv]=\mathbf{L}[u]+i\mathbf{L}[v]\equiv 0$. Отсюда $\mathbf{L}[u]\equiv 0$ и $\mathbf{L}[v]\equiv 0$, так как комплекснозначная функция действительного аргумента $\mathbf{L}[u+iv]$ тождественно равна нулю, когда $\mathrm{Re}\,\mathbf{L}[u+iv]=\mathbf{L}[u]\equiv 0$ и $\mathrm{Im}\,\mathbf{L}[u+iv]=\mathbf{L}[v]\equiv 0$.

Из свойств 1° и 2° вытекает, что множество решений линейного однородного дифференциального уравнения (8.112) образует линейное пространство, которое в дальнейшем будем называть *пространством решений* этого уравнения. Отсюда следует, что для нахождения любого решения в этом пространстве нужно определить его базис, т. е. найти линейно независимые решения (векторы) пространства решений, через которые линейным образом выражается любое решение этого уравнения.

**Линейная независимость функций. Определитель Вронского.** Напомним, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются *линейно зависимыми* на $(a, b)$, если существуют постоянные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все из которых равны нулю, такие, что

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \ \forall\, x(a, b). \tag{8.115}$$

Если же равенство (8.115) имеет место только при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, то функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называются *линейно независимыми* на $(a, b)$.

Определяющую роль в выяснении линейной зависимости системы функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ класса $C^{(n-1)}(a, b)$ играет *определитель Вронского* *, или *вронскиан*

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{8.116}$$

Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и их первые $n-1$ производные вычисляются в точке $x_0\in(a, b)$, то значение вронскиана в этой точке будет обозначаться $W(x_0)$, т. е.

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}.$$

**Теорема 8.6.** Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ класса $C^{(n-1)}(a, b)$ линейно зависимы, то $W(x)\equiv 0$, $\forall\, x\in(a, b)$.

□ Из линейной зависимости функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ следует, что одна из них, например $y_n$, является линейной комбинацией остальных функций $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, т. е. существуют числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$, такие, что выполнено равенство $y_n=\beta_1 y_1+\beta_2 y_2+\ldots+\beta_{n-1}y_{n-1}$.

---

* Ю. Гёне-Вронский (1776—1853) — польский математик.

Тогда вронскиан этих функций

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & \beta_1 y_1 & + \dots + & \beta_{n-1} y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & \beta_1 y_1' & + \dots + & \beta_{n-1} y_{n-1}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & \beta_1 y_1^{(n-1)} & + \dots + & \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

так как последний его столбец есть линейная комбинация остальных столбцов. ■

Из теоремы 8.6 вытекает очевидное

*Следствие* (достаточное условие линейной независимости функций). Если хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$ определитель Вронского функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ отличен от нуля, то эти функции линейно независимы на $(a, b)$.

**Пример 1.** Покажем, что функции $1, x, \dots, x^{n-1}$ линейно независимы на любом интервале $(a, b)$.

Действительно,

$$W[1, x, \dots, x^{n-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 0 & 1! & 2x & \dots & (n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 2! & \dots & (n-1)(n-2)x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix} = 1!\,2! \cdots (n-1)! \neq 0$$

**Пример 2.** Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — различные числа, то функции $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ линейно независимы на любом интервале $(a, b)$.

□ В самом деле, определитель

$$W\left[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\right] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как *определитель Вандермонда**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

не равен нулю при различных $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

---

* А. Т. Вандермонд (1735—1796) — французский математик.

**Пример 3.** Функции $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ..., $x^{n-1}e^{\lambda x}$ линейно независимы на любом интервале $(a, b)$.

□ В самом деле, рассмотрим равенство

$$\alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 x e^{\lambda x} + \ldots + \alpha_n x^{n-1} e^{\lambda x} = 0. \tag{8.117}$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то оно равносильно равенству $\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1} = 0$, которое возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ в силу доказанной в примере 1 линейной независимости функций $1, x, \ldots, x^{n-1}$.

Итак, равенство (8.117) возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, а это и означает, что функции $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ..., $x^{n-1}e^{\lambda x}$ линейно независимы.

**Условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения.** Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (8.112). Имеет место следующая

**Теорема 8.7.** Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — решения линейного однородного дифференциального уравнения (8.112) на интервале $(a, b)$. Тогда:

1°. Если вронскиан $W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]$ отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$, то решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы на $(a, b)$.

2°. Если существует точка $x_0' \in (a, b)$, в которой $W(x_0') = 0$, то решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на $(a, b)$ и $W(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$.

□ 1. Пусть в точке $x_0 \in (a, b)$ вронскиан $W(x_0) \neq 0$. Согласно следствию, из теоремы 8.6 вытекает линейная независимость решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

2. Предположим, что существует точка $x_0' \in (a, b)$, в которой $W(x_0') = 0$. Это означает, что можно указать числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не равные одновременно нулю, являющиеся решениями однородной системы

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(x_0') + \ldots + \alpha_n y_n(x_0') = 0; \\ &\alpha_1 y_1'(x_0') + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0') = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0') + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0') = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.118}$$

Введем теперь функцию

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x), \tag{8.119}$$

которая как линейная комбинация решений $y_i(x)$ тоже является решением уравнения (8.112). Согласно равенствам (8.118), заключаем, что

$$y(x_0') = 0, \; y'(x_0') = 0, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0') = 0, \tag{8.120}$$

т. е. функция (8.119) удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению (8.112) и нулевым начальным условиям (8.120). Тогда из следствия теоремы 8.5 вытекает, что $y(x) \equiv 0$, т. е. $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$, причем в этом равенстве не все $\alpha_i$ рав-

ны нулю. Значит, функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы. Тогда по теореме 8.6 $W(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$.

*Следствие.* Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — решения однородного уравнения $\mathbf{L}[y]=0$ на $(a, b)$. Если вронскиан $W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]$ отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$, то $W(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

□ В самом деле, если существует точка $x_0 \in (a, b)$, $x_0 \neq x_0$, в которой $W(x_0) = 0$, то в силу 2°, теоремы 8.7 $W(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$, т. е. $W(x_0) = 0$, что противоречит условию. ■

Покажем, что всякое линейное однородное дифференциальное уравнение порядка $n$ имеет ровно $n$ линейно независимых решений, т. е. размерность пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка $n$ равна $n$. Имеет место следующая

**Теорема 8.8** (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Всякое линейное однородное дифференциальное уравнение порядка $n$ имеет ровно $n$ линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x \in (a, b)$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \quad (8.121)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — некоторые постоянные.

□ Зададим систему $n$ начальных условий вида

$$\left.\begin{array}{l} y(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0; \\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{array}\right\} \quad (8.122)$$

Каждой $i$-й строке начальных условий (8.122) отвечает единственное решение $y_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, т. е. решения $y_i(x)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0; \\ y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. \end{array}\right\} \quad (8.123)$$

Покажем, что решения $y_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие системе начальных условий (8.123), линейно независимы. В самом деле, согласно равенствам (8.123), вронскиан этих решений удовлетворяет условию

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \quad (8.124)$$

Отсюда и из теоремы 8.7 заключаем, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы.

Таким образом, для линейного однородного дифференциального уравнения (8.112) порядка $n$ найдены $n$ линейно независимых решений. Покажем теперь, что любое решение этого уравнения является линейной комбинацией найденных решений $y_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, т. е. оно имеет вид (8.121).

Действительно, пусть $\bar{y}=\bar{y}(x)$ — произвольное решение уравнения (8.112), удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{y}(x_0)=y_0,\ \bar{y}'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \qquad (8.125)$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — некоторые числа, $x_0 \in (a, b)$. Покажем, что можно подобрать постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, что функция (8.121) тоже будет удовлетворять условиям (8.125). Это означает, что $\bar{y}(x) \equiv y(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

В самом деле, если функция (8.121) удовлетворяет начальным условиям (8.125), получим систему линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0;\\
&C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0';\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-2)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}
\end{aligned}\right\} \qquad (8.126)$$

относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Согласно равенствам (8.123), определитель системы (8.126) $W(x_0)=1$. В таком случае система (8.126) имеет единственное решение $C_1, C_2, \ldots, C_n$, при котором функция (8.121) удовлетворяет условиям (8.125), т. е. $\bar{y}(x) \equiv y(x)$.

Итак, доказано, что если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения линейного однородного дифференциального уравнения (8.112), то функция (8.121) тоже является решением этого уравнения, и любое решение этого уравнения можно получить из формулы (8.121) соответствующим выбором постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Таким образом, *равенство (8.121) определяет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (8.112).* ■

Итак, в теореме построен базис пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка, состоящий из $n$ линейно независимых функций. Согласно следствию 2 из теоремы 1.6, ч. 1, любой базис этого пространства состоит из $n$ линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Всякая система $n$ линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейного однородного дифференциального уравнения порядка $n$ называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

*Замечание.* Для получения фундаментальной системы решений не обязательно задавать начальные условия вида (8.123). Можно взять систему начальных условий в точке $x_0$ произвольно, лишь бы вронскиан $W(x_0)$ был отличен от нуля.

Теоремы 8.7 и 8.8 дают возможность решить следующую задачу: по данной системе $n$ линейно независимых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$

класса $C^{(n)}(a, b)$, таких, что $W(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, построить линейное однородное дифференциальное уравнение порядка $n$, решениями которого являются данные функции.

Найдем это уравнение. Так как общее решение искомого дифференциального уравнения имеет вид $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, то отсюда следует, что функции $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы. В таком случае имеет место равенство

$$W(x) = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y' & y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \forall x \in (a, b), \qquad (8.127)$$

согласно теореме 8.6. Равенство (8.127) является искомым дифференциальным уравнением.

**Пример 4.** Составить дифференциальное уравнение, зная его фундаментальную систему решений $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^{-2x}$.

□ По формуле (8.127) имеем

$$\begin{vmatrix} y & 1 & x & e^{-2x} \\ y' & 0 & 1 & -2e^{-2x} \\ y'' & 0 & 0 & 4e^{-2x} \\ y''' & 0 & 0 & -8e^{-2x} \end{vmatrix} = -y''' \begin{vmatrix} 1 & x & e^{-2x} \\ 0 & 1 & -2e^{-2x} \\ 0 & 0 & 4e^{-2x} \end{vmatrix} -$$

$$- 8e^{-2x} \begin{vmatrix} y & 1 & x \\ y' & 0 & 1 \\ y'' & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4e^{-2x} y''' - 8e^{-2x} y'' = -4e^{-2x}(y''' + 2y'') = 0,$$

т. е. искомое уравнение имеет вид $y''' + 2y'' = 0$.

**Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.** Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение (8.107) или (8.111). Имеет место следующая

**Теорема 8.9** (о структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения). Общее решение неоднородного линейного диференциального уравнения $\mathbf{L}[y] = f(x)$ представляет собой сумму некоторого его частного решения $y^*(x)$ и общего решения $y^0(x)$ соответствующего однородного дифференциального уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$.

□ Пусть $y^*(x)$ — частное решение уравнения (8.108), т. е. $\mathbf{L}[y^*(x)] = f(x)$, а $y^0(x)$ — общее решение уравнения (8.107), т. е. $\mathbf{L}[y^0(x)] = 0$. Тогда в силу линейности оператора $\mathbf{L}[y]$ имеем

$$\mathbf{L}[y^* + y^0] = \mathbf{L}[y^*] + \mathbf{L}[y^0] = f(x) + 0 = f(x),$$

т. е. функция

$$y = y^*(x) + y^0(x) \qquad (8.128)$$

есть решение неоднородного уравнения (8.107).

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (8.108). Тогда $y^0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots +$

$+C_n y_n(x)$ — общее решение уравнения (8.108), и формула (8.128) принимает вид

$$y = y^* + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n. \tag{8.129}$$

Покажем, что любое решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (8.107) можно получить из формулы (8.129) соответствующим выбором коэффициентов $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Пусть $\bar{y}(x)$ — произвольное решение уравнения (8.107), удовлетворяющее начальным условиям (8.125). Подстановка условий (8.125) в функцию (8.129) приводит к системе линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y^*(x_0); \\ &C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0' - y^{*\prime}(x_0); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y^{*(n-1)}(x_0) \end{aligned}\right\} \tag{8.130}$$

относительно постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Определителем этой системы является вронскиан $W(x_0)$. Так как система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ фундаментальная, то $W(x_0) \neq 0$. В таком случае система (8.130) имеет единственное решение $C_1, C_2, \ldots, C_n$, откуда вытекает, что функция (8.129) при найденных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и функция $\bar{y}(x)$ удовлетворяют уравнению (8.107) и одним и тем же начальным условиям. Следовательно, $\bar{y}(x) = y^*(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$, т. е. любое решение $\bar{y}(x)$ можно получить из решения (8.129) соответствующим выбором постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Значит, функция (8.129) — общее решение неоднородного дифференциального уравнения (8.107).

**Принцип суперпозиции решений.** Выше было показано, что если $y_1$ и $y_2$ — два решения линейного однородного дифференциального уравнения (8.108), то любая их линейная комбинация $C_1 y_1 + C_2 y_2$ с постоянными коэффициентами также есть решение этого уравнения. Далее, если $y_1$ — решение однородного уравнения (8.108), а $y_2$ — решение неоднородного уравнения (8.107), то их сумма $y_1 + y_2$ есть решение неоднородного уравнения (8.107).

Покажем теперь, что если $y_1(x)$ — решение уравнения $\mathbf{L}[y] = f_1(x)$, а $y_2(x)$ — решение уравнения $\mathbf{L}[y] = f_2(x)$, то сумма $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $\mathbf{L}[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

В самом деле, в силу линейности оператора $\mathbf{L}[y]$ имеем

$$\mathbf{L}[y_1 + y_2] = \mathbf{L}[y_1] + \mathbf{L}[y_2] = f_1(x) + f_2(x).$$

Аналогично показывается, что если функция $u(x) + iv(x)$, где $i$ — мнимая единица, есть решение уравнения $\mathbf{L}[y] = f_1(x) + if_2(x)$ ($u(x)$, $v(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — действительные функции), то функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями уравнений $\mathbf{L}[y] = f_1(x)$ и $\mathbf{L}[y] = f_2(x)$ соответственно.

Доказанное утверждение составляет суть *принципа суперпозиции (наложения) решений*. Очевидно, чтот принцип справедлив и

для любого конечного числа решений, т. е. если $y_i(x)$ — решение уравнения $\mathbf{L}[y] = f_i(x)$, то сумма $\sum_{i=1}^{n} y_i(x)$ является решением уравнения $\mathbf{L}[y] = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$.

**Метод вариации (Лагранжа) произвольных постоянных.** Метод вариации позволяет найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения $\mathbf{L}[y]=f(x)$, если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения $\mathbf{L}[y]=0$, $x \in (a, b)$.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения $\mathbf{L}[y]=0$. Тогда его общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \qquad (8.131)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные числа.

Общее решение неоднородного уравнения $\mathbf{L}[y]=f(x)$ будем искать в виде, сходном с функцией (8.131), считая, что коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ являются уже не постоянными, а функциями от $x$, т. е. общее решение ищем в виде

$$y = C_1(x)\, y_1(x) + \ldots + C_n(x)\, y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x), \qquad (8.132)$$

где $C_i(x)$ — гладкие функции, $i=1, 2, \ldots, n$.

Нашей задачей является выбор неизвестных функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ таким образом, чтобы функция (8.132) удовлетворяла неоднородному уравнению (8.107). Для нахождения неизвестных функций $C_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, необходимо иметь $n$ некоторых условий. Поскольку функция (8.132) должна удовлетворять уравнению $\mathbf{L}[y]=f(x)$, то нужно потребовать, чтобы функции $C_i(x)$ удовлетворяли еще $n-1$ условиям. Эти дополнительные условия выберем так, чтобы производные функции (8.132) имели по возможности тот же вид, какой они имеют при постоянных $C_i$.

Продифференцируем равенство (8.132):

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x).$$

В этом равенстве положим

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x) = 0, \qquad (8.133)$$

тогда

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i'(x),$$

т. е. $y'$ имеет такой же вид, как и при постоянных $C_i$. Из последнего равенства получим

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'(x).$$

Полагая здесь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'(x) = 0, \tag{8.134}$$

имеем

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i''(x),$$

т. е. и вторая производная $y''$ имеет такой же вид, как и при постоянных $C_i$.

Продолжая этот процесс до нахождения производной $y^{(n-1)}$ включительно, будем иметь

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-2)}(x).$$

Требуя здесь выполнения равенства

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-2)}(x) = 0, \tag{8.135}$$

получаем

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x).$$

Отсюда

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x). \tag{8.136}$$

Подставив найденные производные $y'$, $y''$, ..., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ и функцию (8.132) в уравнение (8.107), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) + a_1(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n-1)}(x) +$$

$$+ a_2(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i^{(n-2)}(x) + \ldots + a_n(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x) = f(x).$$

Группируя слагаемые в левой части этого равенства, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x) \left[ y_i^{(n)}(x) + a_1(x)\, y_i^{(n-1)}(x) + \ldots\ a_n(x)\, y_i(x) \right] + .$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \tag{8.137}$$

Выражение в квадратной скобке равенства (8.137) равно нулю, так как $y_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, является решением однородного уравнения (8.108). Тем самым из формулы (8.137) получаем последнее, $n$-е, условие для отыскания функций $C_i(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \tag{8.138}$$

Итак, согласно условиям (8.133) — (8.138), неизвестные функции $C_i(x)$ равенства (8.132) находятся из системы

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) + \ldots + C_n'(x)\,y_n(x) = 0; \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)\,y_n'(x) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\,y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-2)}(x) = 0; \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x) = f(x), \end{array}\right\} \quad (8.139)$$

являющейся линейной неоднородной системой алгебраических уравнений относительно функций $C_i'(x)$. Определителем этой системы является вронскиан $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, не равный нулю, так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (8.108). Поэтому система (8.139) имеет единственное решение $C_i'(x) = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, откуда $C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx + C_i$, где $C_i$ — произвольные постоянные.

В частности, для уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x)$$

система (8.139) имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0; \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = f(x). \end{array}\right\}$$

Решая ее по формулам Крамера, имеем

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}^{-1} = -\frac{f(x)\,y_2(x)}{W[y_1(x),\ y_2(x)]};$$

$$C_2'(x) = \frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1(x),\ y_2(x)]},$$

так что

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x)\,y_2(x)}{W[y_1,\ y_2]}\,dx + C_1; \quad C_2(x) = \int \frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1,\ y_2]}\,dx + C_2. \quad (8.140)$$

**Пример** 5. Зная, что функции $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y''' + y'' = 0$, методом вариации решить уравнение

$$y''' + y'' = (x-1)/x^2. \quad (8.141)$$

□ Искомое решение ищем в виде

$$y = C_1(x) \cdot 1 + C_2(x)\,x + C_3(x)\,e^{-x}. \quad (8.142)$$

Для определения функций $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ составляем систему (8.139)

$$\left.\begin{array}{r} C_1'(x) + C_2'(x)\,x + C_3'(x)\,e^{-x} = 0; \\ C_2'(x) - C_3'(x)\,e^{-x} = 0; \\ C_3'(x)\,e^{-x} = (x-1)/x^2. \end{array}\right\}$$

Из третьего уравнения системы находим

$$\left(C_3'(x) = \frac{x-1}{x^2}\,e^x\right) \Rightarrow \left(C_3(x) = \int \frac{x-1}{x^2}\,e^x dx + C_3 = \right.$$

$$\left. = \int d\left(\frac{e^x}{x}\right) + C_3 = \frac{e^x}{x} + C_3\right).$$

Тогда из второго уравнения имеем

$$\left(C'(x)=C_3'(x)\,e^{-x}=\frac{x-1}{x^2}\right)\Rightarrow\left(C_2(x)=\int\frac{x-1}{x^2}\,dx+C_2=\ln|x|+\frac{1}{x}+C_2\right).$$

Наконец, из первого уравнения получаем

$$\left(C_1'(x)=-C_2'(x)\,x-C_3'(x)\,e^{-x}=-\frac{x-1}{x}-\frac{x-1}{x^2}=\frac{1-x^2}{x^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(C_1(x)=\int\frac{1-x^2}{x^2}+C_1=-\frac{1}{x}-x+C_1\right).$$

Таким образом, согласно формуле (8.142), общим решением уравнения (8.141) является функция

$$y=\left(-\frac{1}{x}-x+C_1\right)\cdot 1+\left(\ln|x|+\frac{1}{x}+C_2\right)x+$$

$$+\left(\frac{e^x}{x}+C_3\right)e^{-x}=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+x\ln|x|-x+1.$$

**Понижение порядка линейных однородных дифференциальных уравнений.** Для линейных однородных дифференциальных уравнений можно указать подстановки, понижающие его порядок, если известно хотя бы одно его решение. Покажем это на примере уравнения второго порядка

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0. \tag{8.143}$$

Пусть известно его некоторое ненулевое решение $y_1(x)$. Введем замену

$$y=y_1\int z(x)\,dx, \tag{8.144}$$

где $z(x)$ — некоторая неизвестная пока функция.

Последовательно дифференцируя равенство (8.144), находим:

$$y'=y_1'\int z(x)\,dx+y_1z(x);$$

$$y''=y_1''\int z(x)\,dx+2y_1'z(x)+y_1z'(x).$$

Подставляя $y$, $y'$ и $y''$ в уравнение (8.143), получаем

$$\left[y_1''+a_1(x)y_1'+a_2(x)y_1\right]\int z(x)dx+y_1z'(x)+\left(2y_1'+a_1(x)y_1\right)z(x)=0.$$

Выражение в квадратных скобках здесь равно нулю, так как $y_1(x)$ — решение уравнения (8.143). Из последнего равенства тем самым получаем, что функция $z(x)$ удовлетворяет линейному уравнению первого порядка

$$z'(x)+\left(2y_1'/y_1+a_1(x)\right)z(x)=0,$$

т. е. порядок исходного уравнения (8.143) понизился на единицу.

Заметим, что по этой же схеме можно понизить порядок и неоднородного уравнения $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$, если известно некоторое ненулевое решение соответствующего однородного уравнения.

**Пример 6.** Зная, что $y_1 = x$ является решением однородного уравнения $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$, решить уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = e^{-3x}. \tag{8.145}$$

□ Вводим замену $y = x \int z(x)\,dx$, тогда $y' = \int z(x)\,dx + xz(x)$, $y'' = 2z(x) + z'(x)$. В результате исходное уравнение приводится к линейному неоднородному уравнению

$$z'(x) + 3z(x) = e^{-3x}, \tag{8.146}$$

интегрирующий множитель которого $\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$. Умножив на него обе части уравнения (8.146), получим $((ze^{3x})' = 1) \Rightarrow (z = (x + C_1)\,e^{-3x})$. В таком случае общее решение исходного уравнения (8.145) есть

$$y = x \int (x + C_1)\,e^{-3x}dx = -\left(\frac{x + C_1}{3}\right)xe^{-3x} - \frac{xe^{-3x}}{9} + C_2.$$

**Задачи и упражнения**

**1.** Исследовать, являются ли следующие функции линейно зависимыми:
а) $y_1 = a$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$;
б) $y_1 = 1$, $y_2 = \arcsin x$, $y_3 = \arccos x$, $|x| \leqslant 1$.

**2.** Доказать, что функции $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$.

**3.** Составить дифференциальное уравнение по заданной фундаментальной системе его решений:
а) $y_1 = x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$; б) $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$.

**4.** Зная, что функции $y_1 = \cos 2x$ и $y_2 = \sin 2x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 4y = 0$, найти общее решение уравнения $y'' + 4y = 1/\cos 2x$ методом вариации произвольных постоянных.

**5.** Доказать, что линейное дифференциальное уравнение остается линейным при преобразовании искомой функции $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, где $z$ — новая функция; $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — произвольные, достаточное число раз дифференцируемые функции.

## 8.5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.** Уравнение

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{8.147}$$

в котором $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ — постоянные действительные числа, называется *линейным однородным дифференциальным уравнением порядка n с постоянными коэффициентами.* Кратко его можно записать в виде $\mathbf{L}[y] = 0$, где $\mathbf{L}[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny$ — линейный дифференциальный оператор.

В соответствии с методом Эйлера решение уравнения (8.147) будем искать в виде

$$y = e^{\lambda x}, \tag{8.148}$$

где $\lambda$ — некоторое число. Последовательно дифференцируя функцию (8.148), находим

$$y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}. \tag{8.149}$$

Подставив функцию $y=e^{\lambda x}$ и ее производные (8.149) в уравнение (8.147), получим равенство

$$\lambda^n e^{\lambda x}+a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\ldots+a_{n-1}\lambda e^{\lambda x}+a_n e^{\lambda x}=0,$$

из которого после сокращения на множитель $e^{\lambda x}\neq 0$ вытекает соотношение

$$L(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{8.150}$$

Многочлен

$$L(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n \tag{8.151}$$

называется *характеристическим многочленом*, соответствующим дифференциальному оператору $\mathbf{L}[y]$.

Итак, функция $e^{\lambda x}$ тогда и только тогда является решением линейного однородного дифференциального уравнения (8.147), когда число $\lambda$ есть корень уравнения (8.150). Уравнение (8.150) называется *характеристическим уравнением* для линейного однородного дифференциального уравнения (8.147). Нетрудно видеть, что оно получается из дифференциального уравнения заменой в последнем производной искомой функции на соответствующую степень числа $\lambda$, т. е. производная $y^{(k)}$ заменяется на $\lambda^k$, $k=0,1,\ldots,n$ (нулевая производная $y^{(0)}$ есть сама функция $y$). Например, для дифференциального уравнения $4y'''-7y''+8y'-y=0$ характеристическое уравнение имеет вид $4\lambda^3-7\lambda^2+8\lambda-1=0$.

Таким образом, чтобы найти решение уравнения (8.147) в виде функции $y=e^{\lambda x}$, нужно составить характеристическое уравнение (8.150) и найти его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Каждому такому корню $\lambda_i$ соответствует решение $y_i=e^{\lambda_i x}$, $i=1, 2, \ldots, n$. При этом возможны следующие случаи:

1°. Корни характеристического уравнения $L(\lambda)=0$ действительны и различны.

2°. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различные, но среди них имеются комплексные.

3°. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1°. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — действительные и различные корни характеристического уравнения (8.150). Им отвечает, согласно равенству (8.148), $n$ следующих решений

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\ y_2=e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_n=e^{\lambda_n x} \tag{8.152}$$

уравнения (8.147). Функции (8.152) являются линейно независимыми (см. пример 2 § 8.4). Следовательно, они образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (8.147), и всякое решение этого уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\ \ldots\ +C_ne^{\lambda_n x}, \tag{8.153}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

**Пример 1.** Решить уравнение $y''' - y'' - 6y' = 0$.

□ Составим характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = 0$ или $\lambda(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$. Его корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ — действительные и различные числа. Им отвечают решения $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = e^{-2x}$ и $y_3 = e^{3x}$, поэтому в соответствии с формулой (8.152) любое решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}.$$

2°. Пусть среди различных корней характеристического уравнения (8.150) имеется комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Поскольку коэффициенты этого уравнения — действительные числа, то сопряженное комплексное число $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ тоже будет его корнем. Корню $\lambda = \alpha + i\beta$ в соответствии с формулой (8.148) отвечает решение

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$

которое с учетом формулы Эйлера (4.15), ч. II, можно записать в виде

$$y = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x. \qquad (8.154)$$

Аналогично корню $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ соответствует решение

$$\bar{y} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x, \qquad (8.155)$$

сопряженное с решением (8.154). Полученные решения $y$ и $\bar{y}$ являются комплекснозначными функциями действительного переменного $x$.

В силу свойства 4° линейного дифференциального оператора заключаем, что действительные функции

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x \qquad (8.156)$$

являются решениями уравнения (8.147). Нетрудно проверить, что вронскиан этих функций $W = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$, т. е. функции (8.156) линейно независимы.

Комплексно-сопряженному решению (8.155) отвечает та же (с точностью до множителя) пара действительных решений (8.156).

Итак, паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (8.150) отвечает пара линейно независимых действительных решений $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ уравнения (8.147). Их комбинация

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \qquad (8.157)$$

тоже будет решением этого уравнения.

**Пример 2.** Решить уравнение $y^V - 5y^{IV} + 8y''' + 8y'' + 7y' + 13y = 0$.

□ Характеристическое уравнение $\lambda^5 - 5\lambda^4 + 8\lambda^3 + 8\lambda^2 + 7\lambda + 13 = 0$ или $(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 13) = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = \pm i$, $\lambda_{4,5} = 3 \pm 2i$. Этим корням, согласно равенствам (8.148) и (8.156), отвечают решения $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$, $y_4 = e^{3x} \cos 2x$, $y_5 = e^{3x} \sin 2x$.

Тогда любое решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + e^{3x}(C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x).$$

3°. Пусть теперь $\lambda$ является корнем характеристического уравнения (8.150) кратности $k$. Тогда, согласно формуле (4.28), ч. II, выполнены равенства

$$L(\lambda)=L'(\lambda)=L''(\lambda)=\ldots=L^{(k-1)}(\lambda)=0,\ L_{(k)}(\lambda)\neq 0. \qquad (8.158)$$

Этому $k$-кратному корню $\lambda$ соответствует решение $y=e^{\lambda x}$ дифференциального уравнения (8.147). Необходимо найти еще $k-1$ решений, составляющих с решением $e^{\lambda x}$ фундаментальную систему. Покажем, что таковыми являются $k-1$ функций $xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1}e^{\lambda x}$.

Предварительно установим еще некоторые свойства дифференциального оператора $\mathbf{L}[y]$.

Пусть $f(x, \lambda)$ — $n+1$ раз непрерывно дифференцируемая функция. Тогда

$$\mathbf{L}[f(x,\ \lambda)]=f^{(n)}_{x^n}(x,\ \lambda)+a_1f^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,\ \lambda)+\ \ldots\ +a_nf(x,\ \lambda).$$

Дифференцируя это равенство по $\lambda$ и учитывая равенство смешанных производных, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{L}[f(x,\ \lambda)]=f^{(n+1)}_{x^n\lambda}(x,\ \lambda)+a_1f^{(n)}_{x^{n-1}\lambda}(x,\ \lambda)+\ \ldots\ +a_nf'_\lambda(x,\ \lambda)=$$

$$=(f'_\lambda(x,\ \lambda))^{(n)}_{x^n}+a_1\left(f'_\lambda(x,\ \lambda)\right)^{(n-1)}_{x^{n-1}}+\ \ldots\ +a_nf'_\lambda(x,\ \lambda)=\mathbf{L}\left[\frac{\partial f(x,\ \lambda)}{\partial\lambda}\right].$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathbf{L}[f(x,\ \lambda)]=\mathbf{L}\left[\frac{\partial f(x,\ \lambda)}{\partial\lambda}\right].$$

Аналогично показывается, что если функция $f(x, \lambda)$ непрерывно дифференцируема $n+m$ раз, то

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\mathbf{L}[f(x,\ \lambda)]=\mathbf{L}\left[\frac{\partial f^m(x,\ \lambda)}{\partial\lambda^m}\right],\ m=1,\ 2,\ \ldots \qquad (8.159)$$

В частности, если $f(x, \lambda)=e^{\lambda x}$, то

$$\mathbf{L}[e^{\lambda x}]=\lambda^ne^{\lambda x}+\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\ldots+a_ne^{\lambda x}=e^{\lambda x}L(\lambda), \qquad (8.160)$$

где $L(\lambda)$ — характеристический многочлен (8.151). Из равенств (8.159) и (8.160) с учетом формулы Лейбница (3.33) имеем

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\mathbf{L}[e^{\lambda x}]=\mathbf{L}\left[\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}e^{\lambda x}\right]=\mathbf{L}[x^me^{\lambda x}]=\sum_{j=0}^{m}C^j_mL^{(j)}(\lambda)\,x^{m-j}e^{\lambda x}.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\mathbf{L}[x^me^{\lambda x}]=e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{m}C^j_mL^{(j)}(\lambda)\,x^{m-j}. \qquad (8.161)$$

Отсюда, согласно соотношениям (8.158), из равенства (8.161) имеем $\mathbf{L}[x^me^{\lambda x}]=0$, $m=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$, т. е., действительно, функции $xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}$, ..., $x^{k-1}e^{\lambda x}$ являются решениями дифференциального уравнения $\mathbf{L}[y]=0$.

Итак, если $\lambda$ — корень кратности $k$ характеристического уравнения (8.150), то решениями дифференциального уравнения в этом случае являются $k$ линейно независимых функций

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x} \tag{8.162}$$

(линейная независимость этих функций установлена в примере 3 § 8.4). Линейная комбинация функций (8.162)

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} + C_3x^2e^{\lambda x} + \ldots + C_kx^{k-1}e^{\lambda x} = \\ &= e^{\lambda x}(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_kx^{k-1}) \end{aligned} \tag{8.163}$$

тоже является решением линейного дифференциального уравнения (8.147).

**Пример 3.** Корнями характеристического уравнения служат числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -2$, $\lambda_6 = -1$, $\lambda_7 = 0$. Записать общее решение соответствующего дифференциального уравнения.

□ Согласно формулам (8.148) и (8.163), искомое решение имеет вид

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + e^{-2x}(C_4 + C_5x) + C_6e^{-x} + C_7.$$

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ — комплексный корень кратности $k$ характеристического уравнения (8.150), то функции

$$x^me^{(\alpha+i\beta)x} = x^me^{\alpha x}\cos\beta x + ix^me^{\alpha x}\sin\beta x,\ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,$$

являются комплекснозначными решениями уравнения (8.147). Тогда, как показано выше, функции

$$x^me^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^me^{\alpha x}\sin\beta x,\ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-1, \tag{8.164}$$

являются действительными решениями этого уравнения. Заметим, что сопряженному корню $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ в этом случае отвечает тот же набор (8.164) решений дифференциального уравнения. Таким образом, паре сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности $k$ отвечает $2k$ решений (8.164) уравнения (8.147). Их линейная комбинация

$$\begin{aligned} y = {} & e^{\alpha x}\cos\beta x(C_1 + C_2x + \ldots + C_kx^{k-1}) + \\ & + e^{\alpha x}\sin\beta x(C_1' + C_2'x + \ldots + C_k'x^{k-1}) \end{aligned} \tag{8.165}$$

также есть решение этого уравнения.

**Пример 4.** Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2 + 3i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = 1/2$ — корни характеристического уравнения. Записать формулу любого решения соответствующего дифференциального уравнения.

□ В соответствии с формулами (8.148), (8.163) и (8.165) это решение имеет вид

$$\begin{aligned} y = {} & e^{-2x}\cos 3x(C_1 + C_2x + C_3x^2) + e^{-2x}\sin 3x(C_4 + \\ & + C_5x + C_6x^2) + C_7 + C_8x + C_9e^{x/2}. \end{aligned}$$

**Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.** Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными действительными коэффициентами

$$\mathbf{L}[y] = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x). \tag{8.166}$$

Как показано в теореме 8.7, любое его решение имеет вид

$$y = y^* + C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

где $y^*$ — частное решение уравнения (8.166), а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного дифференциального уравнения (8.147), способ нахождения которой изложен выше. Поэтому основной задачей здесь является отыскание частного решения $y^*$ уравнения (8.166). Для специального вида правых частей $f(x)$ задача нахождения частного решения $y^*$ уравнения (8.166) решается с помощью элементарных операций, таких, как дифференцирование и решение систем линейных алгебраических уравнений. Этот метод называется *методом подбора* частного решения или *методом неопределенных коэффициентов.*

Вид правой части $f(x)$ уравнения (8.166), при которой применяется метод подбора,

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x], \tag{8.167}$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени $n$ и $m$ соответственно с постоянными действительными коэффициентами.

Рассмотрим частные случаи правых частей (8.167).

1°. Пусть

$$f(x) = e^{\alpha x}P_n(x) = e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n), \tag{8.168}$$

где $A_0 \neq 0$. Эта функция получается из общего вида (8.167) при $\beta = 0$.

Будем искать частное решение $y^*$ уравнения (8.166) в виде, сходном с его правой частью (8.168), т. е. положим

$$y^* = e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n), \tag{8.169}$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_n$ — пока не известные постоянные коэффициенты.

Подставляя это решение в уравнение (8.166) и учитывая равенство (8.161), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}[y^*] &= \mathbf{L}[B_0x^ne^{\alpha x} + B_1x^{n-1}e^{\alpha x} + \ldots + B_{n-1}xe^{\alpha x} + B_ne^{\alpha x}] = \\
&= B_0\mathbf{L}(x^ne^{\alpha x}) + B_1\mathbf{L}(x^{n-1}e^{\alpha x}) + \ldots + B_{n-1}\mathbf{L}(xe^{\alpha x}) + B_n\mathbf{L}(e^{\alpha x}) = \\
&= B_0e^{\alpha x}\sum_{j=0}^{n} C_n^j L^{(j)}(\alpha)\,x^{n-j} + B_1e^{\alpha x}\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j L^{(j)}(\alpha)\,x^{n-1-j} + \ldots + \\
&\quad + B_{n-1}e^{\alpha x}\sum_{j=0}^{1} C_1^j L^{(j)}(\alpha)\,x^{1-j} + B_ne^{\alpha x}L(\alpha) = \\
&= e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n),
\end{aligned}$$

где $C_i^j$ — биномиальные коэффициенты, $i = 1, 2, \ldots, n$. Сокращая в этом равенстве $e^{\alpha x} \neq 0$ и расписывая подробнее выражение под знаками суммы, приведем его к виду

$$\begin{aligned}
&B_0\left[L(\alpha)\,x^n + C_n^1L'(\alpha)\,x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1}L^{(n-1)}(\alpha)\,x + L^{(n)}(\alpha)\right] + \\
&+ B_1\left[L(\alpha)\,x^{n-1} + C_{n-1}^1L'(\alpha)\,x^{n-2} + \ldots + L^{(n-1)}(\alpha)\right] + \ldots + \\
&+ B_{n-1}\left[L(\alpha)\,x + L'(\alpha)\right] + B_nL(\alpha) = \\
&= A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n.
\end{aligned} \tag{8.170}$$

Так как в обеих частях полученного равенства находятся многочлены одной и той же степени $n$, то, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $x$ слева и справа, получим систему для отыскания коэффициентов $B_0, B_1, \ldots, B_n$:

$$\begin{array}{l|l}
x^n & B_0 L(\alpha) = A_0; \\
x^{n-1} & B_0 C_n^1 L'(\alpha) + B_1 L(\alpha) = A_1; \\
x^{n-2} & B_0 C_n^2 L''(\alpha) + B_1 C_n^1 L'(\alpha) + B_2 L(\alpha) = A_2; \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x & B_0 C_n^{n-1} L^{(n-1)}(\alpha) + B_1 C_n^{n-2} L^{(n-2)}(\alpha) + \ldots + B_{n-1} L(\alpha) = A_{n-1}; \\
x^0 & B_0 L^{(n)}(\alpha) + B_1 L^{(n-1)}(\alpha) + \ldots + B_{n-1} L'(\alpha) + B_n L(\alpha) = A_n.
\end{array} \tag{8.171}$$

Если $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения $L(\lambda)=0$, т. е. $L(\lambda)\neq 0$, то из системы (8.171) последовательно находим все коэффициенты $B_0, B_1, \ldots, B_n$ единственным образом:

$$B_0 = \frac{A_0}{L(\alpha)}, \quad B_1 = \frac{A_1 - B_0 C_n^1 L'(\alpha)}{L(\alpha)};$$

$$B_2 = \frac{A_2 - B_0 C_n^2 L''(\alpha) - B_1 C_n^1 L'(\alpha)}{L(\alpha)}, \quad \ldots$$

Итак, *если $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения $L(\lambda)=0$, то частное решение $y^*$ дифференциального уравнения (8.166) с правой частью (8.168) ищется в виде (8.169).*

Пусть теперь $\alpha$ — корень кратности $k$ характеристического уравнения $L(\lambda)=0$ (резонансный случай), тогда

$$L(\alpha) = L'(\alpha) = \ldots = L^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad L^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

Покажем, что в этом случае частное решение $y^*$ можно найти в виде

$$y^* = x^k e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_{n-1} x + B_n) \tag{8.172}$$

или

$$y^* = e^{\alpha x}(B_0 x^{n+k} + B_1 x^{n+k-1} + \ldots + B_{n-1} x^{k+1} + B_n x^k). \tag{8.173}$$

Действительно, подставив функцию (8.173) в уравнение (8.166), получим (после сокращения на $e^{\alpha x}\neq 0$) равенство

$$B_0 \sum_{j=0}^{n+k} C_{n+k}^j L^{(j)}(\alpha) x^{n+k-j} + B_1 \sum_{j=0}^{n+k-1} C_{n+k-1}^j L^{(j)}(\alpha) x^{n+k-1-j} + \ldots +$$

$$+ B_{n-1} \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j L^{(j)}(\alpha) x^{k+1-j} + B_n \sum_{j=0}^{k} C_k^j L^{(j)}(\alpha) x^{k-j} =$$

$$= A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n.$$

Из этого равенства имеем систему

$$\begin{array}{l|l}
x^n & B_0 C_{n+k}^k L^{(k)}(\alpha) = A_0; \\
x^{n-1} & B_0 C_{n+k}^{k+1} L^{(k+1)}(\alpha) + B_1 C_{n+k-1}^k L^{(k)}(\alpha) = A_1; \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^0 & B_k L^{(n)}(\alpha) + B_{k+1} L^{(n-1)}(\alpha) + \ldots + B_n L^{(k)}(\alpha) = A_n.
\end{array}$$

Отсюда в силу соотношений (8. 158) последовательно однозначно находим коэффициенты $B_0, B_1, ..., B_n$.

Таким образом, *если $\alpha$ — корень кратности $k$ характеристического уравнения $L(\lambda)=0$, то частное решение $y^*$ дифференциального уравнения (8.166) с правой частью (8.168) ищется в виде (8.172).*

Если правая часть уравнения (8.166) имеет вид

$$f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n \qquad (8.174)$$

(она получается из общего вида (8.168) при $\alpha=0$), то возможны два случая:

1) число $\alpha=0$ не является корнем характеристического уравнения. В этом случае, согласно равенству (8.169) при $\alpha=0$, частное решение $y^*$ следует искать в виде

$$y^* = B_0x^n + B_1x^{n-1} + ... + B_{n-1}x + B_n; \qquad (8.175)$$

2) число $\alpha=0$ является корнем кратности $k$ характеристического уравнения. Тогда, как следует из формулы (8.172) при $\alpha=0$, частное решение $y^*$ ищется в виде

$$y^* = x^k(B_0x^n + B_1x^{n-1} + ... + B_{n-1}x + B_n). \qquad (8.176)$$

**Пример 5.** Решить уравнение $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

□ Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Тогда общее решение соответствующего однородного уравнения $y''' - y'' = 0$ имеет вид $y^0 = C_1 + C_2x + C_3e^x$. Поскольку правая часть $f(x) = 12x^2 + 6x$ есть многочлен второй степени, а число $\alpha = 0$ является корнем кратности $k = 2$ характеристического уравнения, то частное решение $y^*$ ищем в виде

$$y^* = x^2(B_0x^2 + B_1x + B_2) = B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2.$$

Отсюда

$$y^{*\prime} = 4B_0x^3 + 3B_1x^2 + 2B_2x;$$

$$x^{*\prime\prime} = 12B_0x^2 + 6B_1x + 2B_2;$$

$$y^{*\prime\prime\prime} = 24B_0x + 6B_1.$$

Подставляя $y^{*\prime\prime}$, $y^{*\prime\prime\prime}$ в исходное уравнение, получаем равенство

$$24B_0x + 6B_1 - 12B_0x^2 - 6B_1x - 2B_2 = 12x^2 + 6x$$

или

$$-12B_0x^2 + (24B_0 - 6B_1)x + (6B_1 - 2B_2) = 12x^2 + 6x.$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & -12B_0 = 12; \\ x^1 & 24B_0 - 6B_1 = 6; \\ x^0 & 6B_1 - 2B_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = -1; \\ B_1 = -5; \\ B_2 = -15. \end{cases}$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y^* = -x^4 - 5x^3 - 15x^2$, а общее решение исходного уравнения есть функция

$$y = y^0 + y^* = C_1 + C_2x + C_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

**Пример 6.** Решить задачу Коши $y'' + y' = 4x^2e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

□ Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, то общим решением однородного уравнения $y'' + y' = 0$ является функция $y^0 = C_1 + C_2e^{-x}$. Правая часть исходного уравнения есть функция $f(x) = 4x^2e^x$ вида (8.168), где $P_2(x) = 4x^2$, $\alpha = 1$. Так как число $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то, согласно равенству (8.169), частное решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде $y^* = (B_0x^2 + B_1x + B_2)e^x$. Отсюда

$$y^{*'} = (2B_0x + B_1)e^x + (B_0x^2 + B_1x + B_2)e^x =$$

$$= [B_0x^2 + (2B_0 + B_1)x + (B_1 + B_2)]e^x;$$

$$y^{*''} = [B_0x^2 + (4B_0 + B_1)x + (2B_0 + 2B_1 + B_2)]e^x.$$

Подставляя $y^{*'}$ и $y^{*''}$ в исходное уравнение и сокращая на $e^x$, получаем равенство

$$2B_0x^2 + (6B_0 + 2B_1)x + (2B_0 + 3B_1 + 2B_2) = 4x^2,$$

откуда имеем систему

$$\left.\begin{array}{l} x^2 \mid 2B_0 = 4; \\ x^1 \mid 6B_0 + 2B_1 = 0; \\ x^0 \mid 2B_0 + 3B_1 + 2B_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = 2; \\ B_1 = -6; \\ B_2 = 7. \end{cases}$$

Итак, $y^* = (2x^2 - 6x + 7)e^x$, и, таким образом, общее решение исходного уравнения есть

$$y = y^0 + y^* = C_1 + C_2e^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x.$$

Отсюда

$$y' = -C_2e^{-x} + (2x^2 - 2x + 1)e^x.$$

Используя начальные условия, находим

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 + 7 = 4; \\ y'(0) = -C_2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -4; \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, искомым решением задачи Коши служит функция

$$y = (2x^2 - 6x + 7)e^x - 4 + e^{-x}.$$

2°. Правая часть дифференциального уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x].$$

Преобразуем $\cos \beta x$ и $\sin \beta x$ по формулам Эйлера:

$$\cos \beta x = (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})/2, \quad \sin \beta x = (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})/2i.$$

Тогда функция (8.167) примет вид

$$f(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}(P_n(x) - iQ_m(x))/2 + e^{(\alpha-i\beta)x}(P_n(x) + iQ_m(x))/2,$$

т. е. правая часть уравнения (8.166) в этом случае состоит из двух слагаемых $f_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}P_s(x)$ и $f_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{P}_s(x)$, где $P_s(x) = (P_n(x) - iQ_m(x))/2$, $\overline{P}_s(x) = (P_n(x) + iQ_m(x))/2$ — многочлены степени $s$, $s = \max\{n, m\}$, причем $\overline{P}_s(x)$ — многочлен, комплексно-сопряженный многочлену $P_s(x)$. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют вид (8.168). Согласно принципу суперпозиции, частное решение уравнения $\mathbf{L}[y] = f_1(x) + f_2(x)$ следует искать в виде $y^* = y_1^* + y_2^*$, где $y_i^*$ — частное решение уравнения $\mathbf{L}[y] = f_i(x)$, $i = 1, 2$.

Покажем, что поскольку $f_2(x) = \overline{f}_1(x)$, то и $y_2^* = \overline{y}_1^*$. В самом деле, из уравнения $\mathbf{L}[y_1] = f_1(x)$ следует, что $\overline{\mathbf{L}[y_1]} = \overline{f_1}(x)$, где черта означает переход к комплексно-сопряженному выражению. Так как оператор $\mathbf{L}[y]$ имеет действительные коэффициенты, то $\overline{\mathbf{L}[y_1]} = \mathbf{L}[\overline{y_1}]$. Таким образом, получаем равенство $\overline{\mathbf{L}[y_1]} = \mathbf{L}[\overline{y_1}] = f_1(x)$, т. е. если $y_1^*$ — решение уравнения $\mathbf{L}[y_1] = f_1(x)$, то $\overline{y}_1^* = y_2^*$ — решение уравнения $\mathbf{L}[y_1] = \overline{f}_1(x) \equiv f_2(x)$.

Способ отыскания частного решения уравнения $\mathbf{L}[y]=f_i(x)$, $i=1$, 2, рассмотрен выше. Согласно полученным правилам, заключаем следующее.

1. Если $\lambda=\alpha\pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения $\mathbf{L}(\lambda)=0$, то частные решения уравнений $\mathbf{L}[y]=f_i(x)$, $i=1, 2$, следует искать в виде $y_1^*=e^{(\alpha+i\beta)x}R_s(x)$, $y_2^*=e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{R_s(x)}$, где $R_s(x)$, $\overline{R_s(x)}$ — комплексно-сопряженные многочлены степени $s$ с неопределенными действительными коэффициентами. Тогда частное решение $y^*$ уравнения $\mathbf{L}[y]=f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ имеет вид

$$y^*=y_1^*+y_2^*=e^{(\alpha+i\beta)x}R_s(x)+e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{R_s(x)}=$$

$$=e^{\alpha x}\left[\cos\beta x+i\sin\beta x)\,R_s(x)+(\cos\beta x-i\sin\beta x)\,\overline{R_s(x)}\right]=$$

$$=e^{\alpha x}\left\{\left[R_s(x)+\overline{R_s(x)}\right]\cos\beta x+i\left[R_s(x)-\overline{R_s(x)}\right]\sin\beta x\right\}=$$

$$=e^{\alpha x}[2\,\mathrm{Re}\,(R_s(x))\cos\beta x-2\,\mathrm{Im}\,(R_s(x))\sin\beta x],$$

где $\mathrm{Re}(R_s(x))$ и $\mathrm{Im}(R_s(x))$ — действительная и мнимая части многочлена $R_s(x)$, представляющие собой многочлены степени $s$ с действительными неопределенными коэффициентами. Обозначим их через $U_s(x)=2\mathrm{Re}(R_s(x))$ и $V_s(x)=-2\mathrm{Im}(R_s(x))$. Тогда последнее равенство примет вид

$$y^*=e^{\alpha x}[U_s(x)\cos\beta x+V_s(x)\sin\beta x]. \qquad (8.177)$$

Таким образом, *если правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения (8.166) имеет вид (8.167) и число $\lambda=\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения $L(\lambda)=0$, то частное решение этого дифференциального уравнения следует искать в виде (8.177), где $s=\max\{n, m\}$.*

2. Если $\lambda=\alpha+i\beta$ является корнем кратности $k$ характеристического уравнения $L(\lambda)=0$ (резонансный случай), то, как и в случае 1°, частное решение дифференциального уравнения (8.166) с правой частью (8.167) ищется в виде

$$y^*=x^ke^{\alpha x}[U_s(x)\cos\beta x+V_s(x)\sin\beta x], \qquad (8.178)$$

где $U_s(x)$ и $V_s(x)$ — многочлены степени $s=\max\{n, m\}$ с действительными неопределенными коэффициентами.

**Пример 7.** Решить уравнение $y''+2y'=10e^x(\sin 2x+\cos 2x)$.

□ Так как корнями характеристического уравнения $\lambda^2+2\lambda=0$ являются числа $\lambda_1=0$ и $\lambda_2=-2$, то общим решением однородного уравнения $y''+2y'=0$ служит функция $y^0=C_1+C_2e^{-2x}$. По виду правой части составляем числа $\lambda=\alpha\pm i\beta=1\pm 2i$, которые не являются корнями характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде ($s=0$) $y^*=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$. Отсюда

$$y^{*\prime}=e^x[(A+2B)\cos 2x+(B-2A)\sin 2x];$$

$$x^{*\prime\prime}=e^x[(4B-3A)\cos 2x+(-4A-3B)\sin 2x].$$

Подставляя $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в уравнение и сокращая на $e^x\neq 0$, получаем равенство

$$(8B-A)\cos 2x+(-8A-B)\sin 2x=10\cos 2x+10\sin 2x.$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в обеих частях равенства соответственно, получаем систему

$$\left.\begin{aligned} 8B - A &= 10; \\ -8A - B &= 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} A &= -18/7; \\ B &= \ \ 13/14. \end{aligned}\right.$$

Таким образом, частное решение исходного дифференциального уравнения есть $y^* = e^x\left(-\frac{18}{7}\cos 2x + \frac{13}{14}\sin 2x\right)$, а его общее решение

$$y = y^0 + y^* = C_1 + C_2 e^{-2x} + e^x\left(-\frac{18}{17}\cos 2x + \frac{13}{14}\sin 2x\right).$$

**Пример** 8. Указать вид частного решения дифференциального уравнения $y^V + 4y^{IV} + 24y''' + 40y'' + 100y' = e^{-x}[(x+3)\cos 3x + (2x^2 - 1)\sin 3x]$.

□ Характеристическое уравнение

$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 24\lambda^3 + 40\lambda^2 + 100\lambda = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 10)^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = -1 + 3i$, $\lambda_{4,5} = -1 - 3i$. В правой части дифференциального уравнения $\alpha = -1$, $\beta = 3$, т. е. $\lambda = \lambda \pm i\beta = -1 \pm 3i$ является двукратным корнем характеристического уравнения (резонанс). Далее $P_n(x) = x + 3$, $Q_m(x) = 2x^2 - 1$, так что $s = \max\{1, 2\} = 2$. Следовательно, искомое частное решение уравнения надо искать в виде

$$y^* = x^2 e^{-x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 3x].$$

Полученные выше результаты сведем в следующую таблицу.

**Таблица видов частных решений для различных видов правых частей**

| Номер п. п. | Правая часть дифференциального уравнения | Корни характеристического уравнения | Вид частного решения |
|---|---|---|---|
| 1 | $f(x) = P_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$ | Число $\lambda=0$ не является корнем характеристического уравнения | $y^* = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n$ |
| | | Число $\lambda = 0$ является корнем кратности $k$ характеристического уравнения | $y^* = x^k(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n)$ |
| 2 | $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x) = e^{\alpha x}(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$ | Число $\lambda = \alpha$ не является корнем характеристического уравнения | $y^* = e^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n)$ |
| | | Число $\lambda = \alpha$ является корнем кратности $k$ характеристического уравнения | $y^* = x^ke^{\alpha x}(B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_{n-1}x + B_n)$ |
| 3 | $f(x) = e^{\alpha x}[P_n\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$ | Число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения | $y^* = e^{\alpha x}[U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x]$, $s = \max\{n, m\}$ |
| | | Число $\lambda = \alpha + i\beta$ является корнем кратности $k$ характеристического уравнения | $y^* = x^ke^{\alpha x}[U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x]$, $s = \max\{n, m\}$ |

Часто правая часть дифференциального уравнения содержит несколько слагаемых, каждое из которых принадлежит одному из трех приведенных в таблице видов. В этом случае частное решение ищется в соответствии с принципом суперпозиции.

**Пример 9.** Для уравнения $y''' + y' = 2x - 3 + e^{2x}(x^2 - 1) + x^3\cos x$ указать вид частного решения.

□ Характеристическое уравнение $\lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i$. Правая часть дифференциального уравнения состоит из трех слагаемых: $f_1 = 2x - 3$, $f_2 = e^{2x}(x^2 - 1)$ и $f_3 = x^3\cos x$. По принципу суперпозиции частное решение ищется в виде $y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^*$, где в соответствии с таблицей

$$y_1^* = x(Ax + B);\quad y_2^* = \left(Cx^2 + Dx + E\right)e^{2x};$$

$$y_3^* = x\left[\left(Fx^3 + Gx^2 + Kx + L\right)\cos x + \left(Mx^3 + Nx^2 + Px + Q\right)\sin x\right].$$

**Задачи и упражнения**

1. Решить уравнения:

а) $y^{VI} + 2y^V + y^{IV} = 0$; б) $y^{IV} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$.

2. Решить неоднородные уравнения:

а) $y'' + y = 4x\cos x$; б) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 2x$; в) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x$.

3. Решить задачу Коши: $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x$, $y(\pi) = \pi e^{\pi}$; $y'(\pi) = e^{\pi}$.

## 8.6. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Общие понятия.** *Нормальной системой* $n$ дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называется система

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n);\\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n);\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \qquad (8.179)$$

где функции $f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, определены в некоторой $(n+1)$-мерной области $D$ переменных $x, y_1, \ldots, y_n$.

*Решением системы* (8.179) на интервале $(a, b)$ называется совокупность $n$ функций $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на $(a, b)$ и удовлетворяющих системе.

Задача Коши для системы (8.179) формулируется следующим образом: найти решение $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}, \qquad (8.180)$$

где $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ — заданные числа.

Для нормальной системы (8.179) имеет место

**Теорема 8.10** (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть функции $f_i(x, y_1, ..., y_n)$, $i=1, 2, ..., n$, непрерывны в окрестности точки $(x_0, y_{10}, ..., y_{n0}) \in D$ и имеют в этой окрестности непрерывные частные производные $\partial f_i/\partial y_j$, $j=1, 2, ..., n$. Тогда найдется интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, в котором существует единственное решение нормальной системы (8.179), удовлетворяющее начальным условиям (8.180).

Введя векторы-столбцы

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

систему (8.179) можно записать в векторной форме

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}),$$

где $(x, \mathbf{y}) = (x, y_1, ..., y_n) \in D$.

Пусть $\mathbf{y} = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T$ — решение системы (8.179) на интервале $(a, b)$. Графиком этого решения служит множество точек из $D$, определяемое равенством

$$G_{\mathbf{y}} = \{x, y_1(x), ..., y_n(x) \mid x \in (a, b)\}.$$

Множество $G_{\mathbf{y}}$ представляет собой параметрически заданную кривую параметра $x \in (a, b)$ в $(n+1)$-мерной области переменных $x, y_1, ..., y_n$. Эта кривая называется *интегральной кривой* системы (8.179).

Начальные условия (8.180) определяют в области $D$ точку $M_0 = (x_0, y_{10}, ..., y_{n0})$. Задача Коши состоит в том, чтобы среди всех интегральных кривых системы (8.179) найти ту, которая проходит через точку $M_0$. Если для системы (8.179) выполнены условия теоремы 8.10, то всякие две интегральные кривые этой системы, имеющие хотя бы одну общую точку, совпадают. Иначе говоря, интегральные кривые системы дифференциальных уравнений или совпадают, или не пересекаются (не имеют общих точек).

Решению $\mathbf{y} = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))^T$ системы (8.179) соответствует движение точки в $n$-мерном пространстве переменных $y_1, y_2, ..., y_n$. Это пространство называется *фазовым* (при $n=2$ оно называется *фазовой плоскостью*), а кривая, описываемая в нем движущейся точкой,— *фазовой траекторией*. Взаимосвязь между интегральной кривой системы и фазовой траекторией состоит в том, что траектория является проекцией интегральной кривой, расположенной в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x, y_1, ..., y_n$ на $n$-мерное пространство переменных

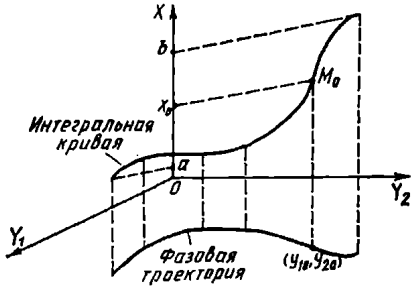



Рис. 8.9

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ (рис. 8.9). Фазовая траектория $\mathbf{y}=(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^T$ обладает тем свойством, что составляющие скорости $y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x)$ в момент времени $x$ равны значениям правых частей $f_1(x, \mathbf{y}(x)), f_2(x, \mathbf{y}(x)), \ldots, f_n(x, \mathbf{y}(x))$ системы (8.19) в точке $(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$.

Если время $x$ не входит явно в правые части системы (8.179), то система $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ называется *автономной* или *стационарной*. Автономная система имеет следующую геометрическую интерпретацию. Говорят, что в области $G\in\mathbf{R}^n$ определено векторное поле $\mathbf{f}$, если каждой точке $y\in G$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{y})$. Тогда решение $\mathbf{y}$ автономной системы $\mathbf{y}'=f(\mathbf{y})$ описывает траекторию движения точки в фазовом $n$-мерном пространстве переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. В каждой точке этой траектории вектор скорости движения $\mathbf{y}'$ совпадает со значением вектора поля $\mathbf{f}$, т. е. касательная к траектории в каждой ее точке совпадает с направлением поля в этой точке. В этом и состоит геометрическая интерпретация решений автономной системы.

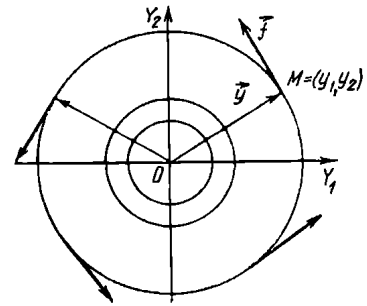



Рис. 8.10

**Пример 1.** Построить фазовые траектории системы $\left.\begin{aligned} y_1' &= -y_2; \\ y_2' &= y_1. \end{aligned}\right\}$

□ В рассматриваемом примере фазовым пространством служит плоскость $Y_1Y_2$ переменных $y_1, y_2$. Векторное поле системы имеет вид $\mathbf{f}=(-y_2, y_1)$. Заметим, что вектор $\mathbf{f}$ перпендикулярен к любому радиус-вектору $\mathbf{y}=(y_1, y_2)$ точки $M=(y_1, y_2)$ фазовой плоскости. Отсюда следует, что радиус-вектор фазовой траектории $\mathbf{y}=(y_1, y_2)$ перпендикулярен к вектору поля $\mathbf{f}$ в любой ее точке (рис. 8.10). Таким свойством обладают концентрические окружности с центром в начале координат. Убедимся в этом.

Действительно, исключая $x$ из системы, имеем

$$\left(\frac{dy_1}{dy_2}=-\frac{y_2}{y_1}\right)\Rightarrow(y_1dy_1+y_2dy_2=0).$$

Отсюда интегрированием получаем равенство $y_1^2+y_2^2=C$, определяющее на плоскости $Y_1Y_2$ концентрические окружности с центром в точке $(0, 0)$ $(C\geqslant 0)$.

**Переход от дифференциального уравнения к системе дифференциальных уравнений.** Дифференциальное уравнение $n$-го порядка

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{8.181}$$

можно свести к системе дифференциальных уравнений.

В самом деле, положим

$$\left.\begin{aligned} y &= y_1; \\ y' &= y_1' = y_2; \\ y'' &= y_2' = y_3; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= y_{n-1}' = y_n \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} y_1 &= y; \\ y_2 &= y'; \\ y_3 &= y''; \\ &\ldots\ldots \\ y_n &= y^{(n-1)}. \end{aligned}\right. \tag{8.182}$$

Тогда уравнение (8.181) примет вид

$$y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{8.183}$$

Таким образом, уравнение (8.181) с учетом равенств (8.182) и (8.183) эквивалентно нормальной системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2; \\ y_2' &= y_3; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1}' &= y_n; \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{8.184}$$

Решением системы (8.184), согласно равенствам (8.182), служит вектор

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \tag{8.185}$$

первая координатная функция $y_1 = y_1(x) = y(x)$ которого есть решение исходного дифференциального уравнения (8.181).

Итак, заменой (8.182) любое дифференциальное уравнение $n$-го порядка (8.181) всегда можно свести к нормальной системе уравнений первого порядка.

Обратно, пусть дана нормальная система дифференциальных уравнений (8.179), где функции $f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n$ раз непрерывно дифференцируемы в рассматриваемой области $D$. Эту систему, вообще говоря, можно свести к одному дифференциальному уравнению порядка $n$.

В самом деле, из первого уравнения системы (8.179) дифференцированием по $x$ находим

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' =$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n = F_2(x, y_1, \ldots, y_n),$$

поскольку $y_i' = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Дифференцируя теперь это равенство, находим $y_1''' = F_3(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Продолжая этот процесс, получаем новую систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n); \\ y_1'' &= F_2(x, y_1, \ldots, y_n); \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n)} &= F_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\}$$

При определенных условиях из этой системы можно выразить производную $y_1^{(n)}$ в виде функции от $x$, $y_1$, $y_1'$, ..., $y_1^{(n-1)}$, т. е. получить дифференциальное уравнение $y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y^{(n-1)}\right)$.

Итак, нормальную систему $n$ уравнений первого порядка можно, вообще говоря, свести к одному дифференциальному уравнению порядка $n$. На этом основан один из методов интегрирования систем дифференциальных уравнений — *метод исключения.*

**Пример 2.** Решить задачу Коши методом исключения:

$$\begin{cases} y' + 3y + 4z = 0; \\ z' + 2y + 5z = 0; \\ y(0) = 1,\ z(0) = 4. \end{cases}$$

□ Продифференцируем первое уравнение системы: $y'' + 3y' + 4z' = 0$. Подставив сюда $z' = -2y - 5z$ из второго уравнения, получим $y'' + 3y' - 8y - 20z = 0$. Но из первого уравнения $z = -\frac{1}{4}y' - \frac{3}{4}y$.

Таким образом, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 8y' + 7y = 0$, общим решением которого является функция $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-7x}$. Отсюда из равенства $z = -\frac{1}{4}y' - \frac{3}{4}y$ имеем $z = -\frac{1}{2}C_1e^{-x} + C_2e^{-7x}$. Используя теперь начальные условия, окончательно находим искомое решение задачи Коши: $y = -2e^{-x} + 3e^{-7x}$, $z = e^{-x} + 3e^{-7x}$.

**Линейные однородные системы дифференциальных уравнений.** Система

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + \ldots + a_{1n}(x)\,y_n; \\ y_2' &= a_{21}(x)\,y_1 + a_{22}(x)\,y_2 + \ldots + a_{2n}(x)\,y_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + \ldots + a_{nn}(x)\,y_n \end{aligned}\right\} \qquad (8.186)$$

называется *линейной однородной системой дифференциальных уравнений*, записанной в нормальной форме. Будем в дальнейшем предполагать, что $a_{ij}(x)$ — непрерывные на $(a, b)$ функции, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Введя обозначения

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}, \qquad (8.187)$$

эту систему можно записать в векторно-матричном виде

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}. \qquad (8.188)$$

Решения системы (8.188) обладают следующими свойствами:

1°. Если $\mathbf{y}$ — решение системы, обращающееся в нуль хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$, то $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$, $\forall x \in (a, b)$.

Это свойство является следствием теоремы 8.10.

2°. Если $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^k$ — решения системы, то и их линейная комбинация

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2 + \ldots + C_k\mathbf{y}^k \tag{8.189}$$

является решением этой системы.

В самом деле, так как $\mathbf{y}^{i'} = A(x)\,\mathbf{y}^i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то из равенства (8.189) имеем

$$\mathbf{y}' = C_1\mathbf{y}^{1'} + C_2\mathbf{y}^{2'} + \ldots + C_k y^{k'} = C_1 A(x)\,\mathbf{y}^1 + C_2 A(x)\,\mathbf{y}^2 + \ldots +$$
$$+ C_k A(x)\,\mathbf{y}^k = A(x)\,(C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2 + \ldots + C_k\mathbf{y}^k) = A(x)\,\mathbf{y}.$$

Из векторов решений

$$\mathbf{y}^j(x) = \begin{pmatrix} y_{1j}(x) \\ y_{2j}(x) \\ \ldots \\ y_{nj}(x) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

системы $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$ образуем матрицу

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{bmatrix} = [\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n], \tag{8.190}$$

столбцами которой являются решения этой системы.

**Линейная зависимость решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений.** Пусть

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \ldots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \ldots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{y}^k = \begin{pmatrix} y_{1k}(x) \\ y_{2k}(x) \\ \ldots \\ x_{nk}(x) \end{pmatrix} —$$

векторные функции, определенные на $(a, b)$. Функции $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^k$ называются *линейно зависимыми* на $(a, b)$, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1\mathbf{y}^1(x) + \alpha_2\mathbf{y}^2(x) + \ldots + \alpha_k\mathbf{y}^k(x) \equiv \mathbf{0} \ \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x) + \alpha_2 y_{12}(x) + \ldots + \alpha_k y_{1k}(x) \equiv 0; \\ \alpha_1 y_{21}(x) + \alpha_2 y_{22}(x) + \ldots + \alpha_k y_{2k}(x) \equiv 0; \\ \ldots \\ \alpha_1 y_{n1}(x) + \alpha_2 y_{n2}(x) + \ldots + \alpha_k y_{nk}(x) \equiv 0, \ \forall x \in (a, b). \end{cases}$$

Если равенство $\alpha_1\mathbf{y}^1(x) + \alpha_2\mathbf{y}^2(x) + \ldots + \alpha_k\mathbf{y}^k(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$, возможно в том и только в том случае, если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_k = 0$, то функции $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^k$ называются *линейно независимыми.*

Справедлива следующая

**Теорема 8.11.** Пусть $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ — решение линейной системы $\mathbf{y}' = A(x)\,\mathbf{y}$ на интервале $(a, b)$. Тогда:

1°. Если определитель $|Y(x)|$ (матрица $Y(x)$ определена равен-

ством (8.190)) отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$, то решения $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ линейно независимы на $(a, b)$.

2°. Если существует точка $x_0' \in (a, b)$, в которой $|Y(x_0')| = 0$, то решения $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ системы $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ линейно зависимы на $(a, b)$ и $|Y(x)| \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$.

□ 1°. Пусть $|Y(x_0)| \neq 0$. Предположим, что решения $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ системы $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ линейно зависимы. Следовательно, одно из решений, например $\mathbf{y}^n$, является линейной комбинацией остальных решений $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^{n-1}$, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, не все равные нулю, такие, что

$$\mathbf{y}^n = \alpha_1\mathbf{y}^1 + \alpha_2\mathbf{y}^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\mathbf{y}^{n-1} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1n} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{1k}; \\ y_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{2k}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{nn} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{nk}. \end{cases}$$

Тогда

$$|Y(x)| = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n-1} & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n-1} & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn-1} & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k y_{nk} \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \forall x \in (a, b),$$

так как последний столбец есть линейная комбинация остальных столбцов. Отсюда при $x = x_0$ получаем, что $|Y(x_0)| = 0$. Это противоречит условию. Следовательно, предположение, что решения $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ линейно зависимы, неверно. Значит, функции $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ линейно независимы.

2°. Предположим, что существует точка $x_0' \in (a, b)$, в которой $|Y(x_0')| = 0$. Это означает, что столбцы матрицы $Y(x_0')$ линейно зависимы, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, хотя бы одно из которых отлично от нуля, такие, что $\alpha_1\mathbf{y}^1(x_0') + \alpha_2\mathbf{y}^2(x_0') + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}^n(x_0') = \mathbf{0}$.

Рассмотрим функцию $\mathbf{y}(x) = \sum\limits_{k+1}^{n} \alpha_k \mathbf{y}^k(x)$, которая как линейная комбинация решений системы $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ тоже является решением этой системы. Для функции $\mathbf{y}(x)$ имеем $\mathbf{y}(x_0') = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{y}^k(x_0') = 0$. В

силу единственности решения задачи Коши для системы $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ получаем

$$\mathbf{y}(x) = \alpha_1\mathbf{y}^1(x) + \alpha_2\mathbf{y}^2(x) + \ldots + \alpha_n\mathbf{y}^n(x) \equiv \mathbf{0}, \quad \forall x \in (a, b),$$

где не все $\alpha_k$ равны нулю, т. е. вектор-функции $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ линейно зависимы на $(a, b)$. В пункте 1° доказано, что в этом случае $|Y(x)| \equiv 0, \forall x \in (a, b)$.

*Следствие 1.* Пусть $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ — решение однородной линейной системы $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ на $(a, b)$. Если определитель $|Y(x)|$ отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$, то $|Y(x)| \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

□ В самом деле, если существует точка $x_0' \in (a, b)$, $x_0' \neq x_0$, в которой $|Y(x_0')| = 0$, то в силу свойства 2° теоремы 8.11 выполнено соотношение $|Y(x)| \equiv 0, \forall x \in (a, b)$. Отсюда при $x = x_0$ получаем $|Y(x_0)| = 0$, что противоречит условию. Значит, $|Y(x)| \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

*Следствие 2.* Пусть $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ — решения линейной системы $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ на $(a, b)$. Для того чтобы функции $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ были линейно независимы на $(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы $|Y(x)| \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

□ Необходимость. Пусть решения $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ системы $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ линейно независимы на $(a, b)$. Предположим, что в некоторой точке $x_0' \in (a, b)$ выполнено равенство $|Y(x_0')| = 0$. Тогда в силу 2° теоремы 8.11 решения $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ линейно зависимы на $(a, b)$, что противоречит условию. Значит, $|Y(x)| \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

Достаточность. Пусть $|Y(x)| \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Тогда из пункта 1° теоремы 8.11 следует, что решения $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ линейно независимы на $(a, b)$. ■

**Структура общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений.** Имеет место

**Теорема 8.12** (о структуре общего решения однородной системы дифференциальных уравнений). Система $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, имеет ровно $n$ линейно независимых решений. Любое решение этой системы имеет вид

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2 + \ldots + C_n\mathbf{y}^n, \tag{8.191}$$

где $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ — линейно независимые решения, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ произвольные постоянные.

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 8.8 о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения порядка $n$.

Совокупность $n$ линейно независимых на $(a, b)$ решений $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ однородной системы дифференциальных уравнений называется *фундаментальной системой решений* этой системы или *базисом решений*. Формула (8.191) определяет *общее решение однородной системы дифференциальных уравнений*.

Если решения $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ линейно независимы, то матрица (8.190) называется *фундаментальной матрицей системы*. С помощью ее общее решение (8.191) системы можно записать в виде

$\mathbf{y}=Y(x)\mathbf{C}$, где $\mathbf{C}=(C_1, C_2, \ldots, C_n)^T$ — вектор-столбец произвольных постоянных.

**Формула Остроградского — Лиувилля***. Получим сначала формулу производной функционального определителя.

**Теорема 8.13.** Если функции $y_{ij}(x)$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы на $(a, b)$, то имеет место формула

$$\frac{d}{dx}|Y(x)| = \begin{vmatrix} y'_{11}(x) & \ldots & y'_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y'_{21}(x) & \ldots & y'_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y'_{n1}(x) & \ldots & y'_{nn}(x) \end{vmatrix}. \tag{8.192}$$

□ Убедимся в справедливости этой формулы при $n=2$. (В общем случае доказательство проводится по индукции.) Имеем

$$\frac{d}{dx}|Y(x)| = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} = \frac{d}{dx}(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}) =$$

$$= y'_{11}y_{22} + y_{11}y'_{22} - y'_{12}y_{21} - y_{12}y'_{21} = (y'_{11}y_{22} - y'_{12}y_{21}) +$$

$$+ (y_{11}y'_{22} - y_{12}y'_{21}) = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y'_{21} & y'_{22} \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Докажем теперь следующую теорему.

**Теорема 8.14.** Пусть $A(x)$ — матрица системы дифференциальных уравнений (8.186), а $Y(x)$ — матрица, вектор-столбцы которой являются решениями этой системы на $(a, b)$. Тогда имеет место *формула Остроградского — Лиувилля:*

$$|Y(x)| = |Y(x_0)|\, e^{\int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)+a_{22}(t)+\ldots+a_{nn}(t)]dt} =$$

$$= |Y(x_0)|\, e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{Sp}A(t)dt} \tag{8.193}$$

Здесь $x_0$ — произвольная точка интервала $(a, b)$, а $\mathrm{Sp}A(t)$ — след матрицы $A(t)$: $\mathrm{Sp}A(t)=a_{11}(t)+a_{22}(t)+\ldots+a_{nn}(t)$.

□ Если $\mathbf{y}^j=(y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj})^T$ — решение системы (8.186), то

$$y'_{ij} = a_{i1}(x)\,y_{1j} + a_{i2}y_{2j} + \ldots + a_{in}(x)\,y_{nj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\,y_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.194}$$

* М. В. Остроградский (1801—1861) — русский математик; Ж. Лиувилль (1809—1882) — французский математик.

Подставляя производную (8.194) в первый определитель в правой части равенства (8.192), получаем

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}(x)\,y_{k1}(x) & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}(x)\,y_{k2}(x) & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}(x)\,y_{kn}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Этот определитель не изменится, если из элементов его первой строки вычесть элементы второй строки, умноженные на $a_{12}$, элементы третьей строки, умноженные на $a_{13}$, и, наконец, элементы последней, $n$-й строки, умноженные на $a_{1n}$. В результате получим

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x)\,y_{11}(x) & a_{11}(x)\,y_{12}(x) & \dots & a_{11}(x)\,y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} = a_{11}(x)\,|Y(x)|.$$

Поступая аналогично с остальными определителями равенства (8.192), получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d}{dx}|Y(x)| = a_{11}(x)\,|Y(x)| + a_{22}(x)\,|Y(x)| + \dots + a_{nn}(x)\,|Y(x)| = \\ = |Y(x)|\,\mathrm{Sp}\,A(x),$$

решение которого имеет вид

$$|Y(x)| = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{Sp}A(t)dt},$$

где $x_0$ — произвольная точка из $(a, b)$; $C$ — постоянная интегрирования. Отсюда при $x=x_0$ получаем $C=|Y(x_0)|$, что и доказывает формулу (8.193). ■

Применим формулу Остроградского — Лиувилля к уравнению

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = 0. \tag{8.195}$$

Как показано выше, это уравнение с помощью замены (8.182) сводится к системе

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = y_3; \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n; \\ y_n' = -a_n(x)\,y_1 - a_{n-1}(x)\,y_2 - \dots - a_1(x)\,y_n, \end{cases}$$

матрица которой

$$A(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \dots & -a_2(x) & -a^1(x) \end{bmatrix}. \quad (8.196)$$

Решение полученной системы в силу формулы (8.185) имеет вид

$$\mathbf{y}^{1T}=\left(y_1,\ y_1',\ \dots,\ y_1^{(n-1)}\right);\ \mathbf{y}^{2T}=\left(y_2,\ y_2',\ \dots,\ y_2^{(n-1)}\right);\ \dots;$$

$$\mathbf{y}^{nT}=\left(y_n,\ y_n',\ \dots,\ y_n^{(n-1)}\right). \quad (8.197)$$

Здесь первые координатные функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ векторов $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$ являются решениями уравнения (8.195). Из равенств (8.197) находим

$$Y(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|Y(x)|=W(x)$, где $W(x)$ — вронскиан функций $y_1, y_2, \dots, y_n$. Так как из равенства (8.196) следует, что $\mathrm{Sp}A(x)=-a_1(x)$, то формула Остроградского — Лиувилля для решений уравнения (8.195) принимает вид

$$W(x)=W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}. \quad (8.198)$$

Формулы Остроградского — Лиувилля (8.193) и (8.198) позволяют судить о линейной зависимости или независимости решений системы дифференциальных уравнений (8.186) или линейных однородных дифференциальных уравнений (8.195). Например, если окажется, что хотя бы в одной точке $x_0$ вронскиан $W(x_0)=0$, то из формулы (8.198) следует, что $W(x)=0$, $\forall x\in(a, b)$, т. е. решения уравнения (8.195) линейно зависимы.

**Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений.** Неоднородная система линейных дифференциальных уравнений в общем случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1+\ \dots\ +a_{1n}(x)y_n+f_1(x);\\ y_2' &= a_{21}(x)y_1+\ \dots\ +a_{2n}(x)y_n+f_2(x);\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1+\ \dots\ +a_{nn}(x)y_n+f_n(x) \end{aligned}\right\} \quad (8.199)$$

или в векторно-матричной форме

$$\mathbf{y}'(x)=A(x)\mathbf{y}+\mathbf{f}(x), \quad (8.200)$$

где $\mathbf{f}(x)=(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ — вектор-столбец свободных членов системы (8.199).

**Теорема 8.15** (о структуре общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений). Любое решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений $\mathbf{y}'=A(x)\mathbf{y}+\mathbf{f}(x)$ представляет собой сумму частного решения $\mathbf{y}^*$ неоднородной системы и общего решения $\mathbf{y}^0$ соответствующей однородной системы $\mathbf{y}'=A(x)\mathbf{y}$, т. е. общее решение неоднородной системы имеет вид

$$\mathbf{y}=\mathbf{y}^*+\mathbf{y}^0=\mathbf{y}^*+C_1\mathbf{y}^1+C_2\mathbf{y}^2+\ldots+C_n\mathbf{y}^n, \qquad (8.201)$$

где $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{y}^2$, ..., $\mathbf{y}^n$ — базис решений однородной системы.

Доказательство этого утверждения проводится по аналогии с доказательством теоремы 8.9 о структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения.

Отметим, что для системы

$$\mathbf{y}'=A(x)\mathbf{y}+\mathbf{f}^1(x)+\mathbf{f}^2(x)+\ldots+\mathbf{f}^k(x)$$

имеет место принцип суперпозиции частных решений, в соответствии с которым ее частное решение ищется в виде $\mathbf{y}^*=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{y}^{*i}$, где $\mathbf{y}^{*i}$— частное решение уравнения $\mathbf{y}'=A(x)\mathbf{y}+\mathbf{f}^i(x)$, $i=1, 2, \ldots, k$.

**Метод вариации (Лагранжа) произвольных постоянных для неоднородных линейных систем.** Общим приемом построения любого решения линейной системы дифференциальных уравнений является метод вариации произвольных постоянных. Изложим его суть для системы (8.199). Предварительно введем понятие производной и интеграла от функциональной матрицы.

Пусть задана матрица (8.191). По определению, *производной* этой *матрицы* называется матрица

$$Y'(x)=\begin{bmatrix} y'_{11}(x) & \ldots & y'_{1n}(x) \\ y'_{21}(x) & \ldots & y'_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y'_{n1}(x) & \ldots & y'_{nn}(x) \end{bmatrix}=[\mathbf{y}^{1\prime}, \mathbf{y}^{2\prime}, \ldots, \mathbf{y}^{n\prime}]. \qquad (8.202)$$

В частности, если $y^i$, $i=1, 2, \ldots, n$,— решения системы $\mathbf{y}'=A(x)\mathbf{y}$, то с учетом равенств (8.202) имеем

$$Y'(x)=[A(x)\mathbf{y}^1(x), A(x)\mathbf{y}^2(x), \ldots, A(x)\mathbf{y}^n(x)]= \\ =A(x)[\mathbf{y}^1(x), \mathbf{y}^2(x), \ldots, \mathbf{y}^n(x)]=A(x)Y(x). \qquad (8.203)$$

Интегралом от матрицы $Y(x)$ называется матрица

$$\int_{x_0}^{x} Y(x)\,dx=\begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x} y_{11}(t)\,dt & \ldots & \int_{x_0}^{x} y_{1n}(t)\,dt \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \int_{x_0}^{x} y_{n1}(t)\,dt & \ldots & \int_{x_0}^{x} y_{nn}(t)\,dt \end{bmatrix}=\left[\int_{x_0}^{x}\mathbf{y}^1(t)\,dt, \ldots, \int_{x_0}^{x}\mathbf{y}^n(t)dt\right],$$

где $x_0$, $x\in(a, b)$.

Пусть известен базис решений однородной системы $\mathbf{y}'=A(x)\mathbf{y}$. Тогда $\mathbf{y}=Y(x)\mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ — вектор-столбец произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — ее общее решение. Предполагая, что $C_i=C_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, подберем вектор-функцию $\mathbf{C}(x)=(C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x))^T$ так, чтобы формула $\mathbf{y}=Y(x)\mathbf{C}(x)$ давала общее решение неоднородной системы. Дифференцируя эту векторную функцию и подставляя результат в уравнение (8.200), получаем соотношение

$$Y'(x)\mathbf{C}(x)+Y(x)\mathbf{C}'(x)=A(x)Y(x)\mathbf{C}(x)+\mathbf{f}(x)$$

или с учетом формулы (8.203) — равенство $Y(x)\mathbf{C}'(x)=\mathbf{f}(x)$.

Отсюда в силу невырожденности матрицы $Y(x)$ (следствие 2 из теоремы 8.11) имеем $\mathbf{C}'(x)=Y^{-1}(x)\mathbf{f}(x)$, где $Y^{-1}(x)$ — матрица, обратная $Y(x)$. Из последнего равенства находим

$$\mathbf{C}(x)=\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt+\mathbf{C},$$

где $\mathbf{C}$ — произвольный вектор-столбец.

Подставив теперь $\mathbf{C}(x)$ в формулу $\mathbf{y}=Y(x)\mathbf{C}(x)$, получим общее решение исходной системы в виде

$$\mathbf{y}=Y(x)\int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt+Y(x)\mathbf{C}. \qquad (8.204)$$

Решим теперь задачу Коши

$$\mathbf{y}'=A(x)\mathbf{y}+\mathbf{f}(x),\ \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}^0,\ x_0\in(a, b). \qquad (8.205)$$

Для этого в равенстве (8.204) положим $\mathbf{y}=\mathbf{y}^0$ при $x=x_0$, получим

$$(\mathbf{y}^0=Y(x_0)\mathbf{C}) \Leftrightarrow (\mathbf{C}=Y^{-1}(x_0)\mathbf{y}^0).$$

Подставив $\mathbf{C}$ в формулу (8.204), найдем окончательно решение задачи Коши (8.205) в виде

$$\mathbf{y}=Y(x)Y^{-1}(x_0)\mathbf{y}^0+\int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(t)\mathbf{f}(t)\,dt. \qquad (8.206)$$

Формула (8.206) называется *формулой Коши.*

**Задачи и упражнения**

1. Найти фазовые траектории системы $x_t'=x$, $y_t'=2y$.

2. Дифференциальное уравнение $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ привести к нормальной системе.

3. Методом исключения решить задачу Коши ($y=y(x)$, $z=z(x)$):

$$y'=y+5z;$$
$$z'=-y-3z,\ y(0)=-2,\ z(0)=1.$$

4. Доказать, что функции $\mathbf{y}^1=(0, e^{-2x})$ и $\mathbf{y}^2=(e^{-2x}, e^{-2x})$ линейно независимы в $(-\infty, +\infty)$.

## 8.7. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.** Система

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n; \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{aligned}\right\} \qquad (8.207)$$

в которой коэффициенты $a_{ij}$ — постоянные действительные числа, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называется *нормальной линейной однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*. Если ввести обозначения

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

то систему (8.207) можно записать в векторно-матричном виде $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

По методу Эйлера ненулевое решение системы (8.207) ищется в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \; y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \; \ldots, \; y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \qquad (8.208),$$

где числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \lambda$ подлежат определению. В векторной форме эти решения имеют вид

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} e^{\lambda x} = \vec{\gamma} e^{\lambda x},$$

где $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T$. Отсюда $\mathbf{y}' = \lambda\vec{\gamma}e^{\lambda x}$. Подставив $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}'$ в систему $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ и сократив на $e^{\lambda x} \neq 0$, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$:

$$(\lambda\vec{\gamma} = A\vec{\gamma}) \Leftrightarrow (A - \lambda E)\vec{\gamma} = 0, \qquad (8.209)$$

где $E$ — единичная матрица.

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение $\vec{\gamma}$, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е. выполнялось равенство

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.210)$$

Уравнение (8.210) называется *характеристическим уравнением* системы (8.207). Решая его, находим собственные значения $\lambda$ мат-

рицы $A$. Эти значения подставляем в систему (8.209), которая в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0; \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\gamma_n = 0. \end{array}\right\} \quad (8.211)$$

Решая ее для каждого числа $\lambda$, находим соответствующий собственный вектор $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T$ матрицы $A$.

Итак, функции (8.208) являются решениями системы (8.207) тогда и только тогда, когда числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ являются координатами собственного вектора $\vec{\gamma}$ матрицы $A$ этой системы, причем $\lambda$ — соответствующее собственное значение матрицы $A$.

Левая часть характеристического уравнения (8.210) представляет собой многочлен от $\lambda$ степени $n$ с действительными коэффициентами. Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* системы (8.207). С учетом кратности он имеет $n$ корней. При этом возможны следующие случаи:

1) корни характеристического уравнения действительные и различные;

2) корни характеристического уравнения различные, но среди них имеются комплексные;

3) среди корней характеристического уравнения имеются кратные.

Рассмотрим каждый из случаев.

1°. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения действительные и различные.

В этом случае, согласно теореме 1.27, ч. I, матрица $A$ имеет $n$ линейно независимых собственных векторов $\vec{\gamma}^1, \vec{\gamma}^2, \ldots, \vec{\gamma}^n$, где

$$\vec{\gamma}^j = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} \\ \gamma_{2j} \\ \vdots \\ \gamma_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда решением системы (8.207) будут вектор-функции

$$\mathbf{y}^j = \vec{\gamma}^j e^{\lambda_j x} = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} e^{\lambda_j x} \\ \gamma_{2j} e^{\lambda_j x} \\ \ldots \\ \gamma_{nj} e^{\lambda_j x} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (8.212)$$

Покажем, что функции $\mathbf{y}^j$ линейно независимы, а значит, образуют базис решений системы (8.207). В самом деле, матрица

$$Y(x) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}e^{\lambda_1 x} & \gamma_{12}e^{\lambda_2 x} & \ldots & \gamma_{1n}e^{\lambda_n x} \\ \gamma_{21}e^{\lambda_1 x} & \gamma_{22}e^{\lambda_2 x} & \ldots & \gamma_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_1 x} & \gamma_{n2}e^{\lambda_2 x} & \ldots & \gamma_{nn}e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}$$

при $x=0$ не вырождена, поскольку ее столбцы в этом случае образованы линейно независимыми собственными векторами $\vec{\gamma}^1, \vec{\gamma}^2, \ldots, \vec{\gamma}^n$ матрицы $A$. Тогда, согласно формуле Остроградского — Лиувилля (8.193), матрица $Y(x)$ не вырождена для всех $x \in \mathbf{R}$. Отсюда по теореме 8.11 следует, что вектор-функции $\mathbf{y}^j$ образуют базис решений, $j=1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, общее решение системы (8.207) в случае действительных различных корней характеристического уравнения, согласно формулам (8.212) и (8.190), в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{y} = C_1\vec{\gamma}^1 e^{\lambda_1 x} + C_2\vec{\gamma}^2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\vec{\gamma}^n e^{\lambda_n x}, \qquad (8.213)$$

а в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1\gamma_{11}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{12}e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n\gamma_{1n}e^{\lambda_n x};\\ y_2 &= C_2\gamma_{21}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{22}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\gamma_{2n}e^{\lambda_n x};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n &= C_n\gamma_{n1}e^{\lambda_1 x} + C_2\gamma_{n2}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n\gamma_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{aligned}\right\}$$

**Пример 1.** Решить систему

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + y_3;\\ y_2' &= -y_1 + 5y_2 - y_3;\\ y_3' &= y_1 - y_2 + 3y_3. \end{aligned}\right\}$$

□ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 5-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

системы имеет корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$ и $\lambda_3=6$. Находим соответствующие им собственные векторы $\vec{\gamma}^1, \vec{\gamma}^2, \vec{\gamma}^3$.

Для $\lambda_1=2$ система (8.211) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 &= 0;\\ -\gamma_1 + 3\gamma_2 - \gamma_3 &= 0;\\ \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решим ее методом Гаусса. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 &= 0;\\ 2\gamma_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2 = 0;\\ \gamma_3 = -\gamma_1. \end{cases}$$

Тогда собственный вектор $\vec{\gamma}^1 = (\gamma_1, 0, -\gamma_1)^T = \gamma_1(1, 0, -1)^T$ или, положив $\gamma_1=1$, будем иметь $\vec{\gamma}^1 = (1, 0, -1)^T$. Точно так же для $\lambda_2=3$ найдем, что $\vec{\gamma}^2 = (1, 1, 1)^T$, а для $\lambda_3=6$ будем иметь $\vec{\gamma}^3 = (1, -2, 1)^T$.

Таким образом, независимыми решениями исходной системы являются вектор-функции

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}, \quad \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix} e^{6x},$$

а общим решением системы в векторной форме, согласно равенству (8.213),— функция

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2 + C_3\mathbf{y}^3 = C_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}e^{2x} + C_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3x} + C_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}e^{6x}$$

или в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x};\\ y_2 &= \quad\ C_2e^{3x} - 2C_3e^{6x};\\ y_3 &= -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + C_3e^{6x}. \end{aligned}\right\}$$

2°. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения различные, но среди них имеются комплексные.

Пусть таким корнем является $\lambda = \alpha + i\beta$. Тогда сопряженное число $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ тоже будет корнем характеристического уравнения, так как его коэффициенты — действительные числа. Отвечающие этим корням соответствующие собственные векторы имеют комплексно-сопряженные координаты. Это следует из равенств $A\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}$, $A\bar{\vec{\gamma}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{\gamma}}$, поскольку $\bar{A} = A$ (элементы $a_{ij}$ матрицы $A$ — действительные числа). Пусть $\vec{\gamma} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ — собственный вектор, отвечающий комплексному корню $\lambda = \alpha + i\beta$. Тогда, согласно равенствам (8.212), вектор-функция

$$\mathbf{y} = \vec{\gamma}e^{\lambda x} = (\mathbf{u} + i\mathbf{v})\,e^{(\alpha+i\beta)x} \tag{8.214}$$

является решением системы (8.207). Отсюда, применив формулу Эйлера, получим комплексное решение

$$\mathbf{y} = (\mathbf{u} + i\mathbf{v})e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}(\mathbf{u}\cos\beta x - \mathbf{v}\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\mathbf{v}\cos\beta x + \mathbf{u}\sin\beta x).$$

Как и в теории линейных однородных дифференциальных уравнений, показывается, что действительная часть $e^{\alpha x}(\mathbf{u}\cos\beta x - \mathbf{v}\sin\beta x)$ и мнимая часть $e^{\alpha x}(\mathbf{v}\cos\beta x + \mathbf{u}\sin\beta x)$ этого комплексного решения будут независимыми решениями системы (8.207).

Таким образом, паре комплексно-сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения отвечает пара действительных решений $\mathbf{y}^1 = e^{\alpha x}(\mathbf{u}\cos\beta x - \mathbf{v}\sin\beta x)$ и $\mathbf{y}^2 = e^{\alpha x}(\mathbf{v}\cos\beta x + \mathbf{u}\sin\beta x)$.

**Пример 2.** Решить систему $\left.\begin{aligned} y' &= 2y - z;\\ z' &= y + 2z. \end{aligned}\right\}$

□ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1\\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

системы имеет корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Находим собственный вектор, отвечающий корню $\lambda_1 = 2 + i$. Из системы

$$\left.\begin{aligned} [2-(2+i)]\,\gamma_1 - \gamma_2 &= 0;\\ \gamma_1 + [2-(2+i)]\,\gamma_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} -i\gamma_1 - \gamma_2 &= 0;\\ \gamma_1 - i\gamma_2 &= 0 \end{aligned}\right.$$

находим, что $\gamma_2 = -i\gamma_1$, т. е. при $\gamma_1 = 1$ собственный вектор

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ -i\gamma_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0i\\ 0-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

($\mathbf{u} = (1,\ 0)^T$, $\mathbf{v} = (0,\ -1)^T$).

Тогда, согласно равенству (8.214), получаем решение

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+i)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2x}(\cos x + i \sin x) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2x}(\cos x + i \sin x) \\ e^{2x}(\sin x - i \cos x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \cos x \\ e^{2x} \sin x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{2x} \sin x \\ -e^{2x} \cos x \end{pmatrix} = \mathbf{y}^1 + i\mathbf{y}^2.$$

Отсюда

$$\mathbf{y}^1 = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2 = e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}.$$

В таком случае общее решение исходной системы в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2 = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}$$

или в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x); \\ y_2 &= C_1 e^{2x} \sin x - C_2 e^{2x} \cos x = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x). \end{aligned}\right\}$$

3°. Среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения имеются кратные.

В этом случае ограничимся формулировкой правила нахождения решения системы дифференциальных уравнений (8.207).

Пусть $\lambda$ — корень кратности $k$ характеристического уравнения (8.210). Тогда решение системы (8.207) ищется в виде

$$\mathbf{y} = (\vec{\delta}^0 + \vec{\delta}^1 x + \vec{\delta}^2 x^2 + \ldots + \vec{\delta}^{k-1} x^{k-1}) e^{\lambda x}, \tag{8.215}$$

где $\vec{\delta}^j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{nj})$ — постоянный $n$-мерный вектор, подлежащий определению, $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

В координатной форме решение (8.215) имеет вид

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{1j} x^j \\ \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{2j} x^j \\ \cdots \\ \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{nj} x^j \end{pmatrix} e^{\lambda x},$$

т. е.

$$\begin{aligned} y_1 &= (\delta_{10} + \delta_{11} x + \delta_{12} x^2 + \ldots + \delta_{1k-1} x^{k-1}) e^{\lambda x}, \\ y_2 &= (\delta_{20} + \delta_{21} x + \delta_{22} x^2 + \ldots + \delta_{2k-1} x^{k-1}) e^{\lambda x}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= (\delta_{n0} + \delta_{n1} x + \delta_{n2} x^2 + \ldots + \delta_{nk-1} x^{k-1}) e^{\lambda x}. \end{aligned} \tag{8.216}$$

Числа $\delta_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, находятся подстановкой функций (8.216) в систему (8.207) и (после сокращения на $e^{\lambda x} \neq 0$) приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $x$ слева и справа получившихся при этом равенств. Поясним сказанное примером.

**Пример 3.** Решить систему

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3; \\ y_2' &= y_1 + y_2 - y_3; \\ y_3' &= y_2 + y_3. \end{aligned}\right\}$$

□ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2 = 0$$

имеет однократный корень $\lambda_1=0$ и двукратный корень $\lambda_{2,3}=1$. Корню $\lambda_1=0$ отвечает собственный вектор $\vec{\gamma}^1=(2,\ -1,\ 1)^T$, которому соответствует решение

$$\mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{pmatrix} = C_1\vec{\gamma}^1 e^{0x} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1^{(1)} = 2C_1; \\ y_2^{(1)} = -C_1; \\ y_3^{(1)} = C_1. \end{cases}$$

Двукратному корню $\lambda_{2,3}=1$, согласно формуле (8.215), соответствует решение вида $y^{(2,3)}=(\vec{\delta}^0+x\vec{\delta}^1)e^x$ или в координатной форме

$$y_1^{(2,3)} = (\delta_{10}+x\delta_{11})e^x,\ y_2^{(2,3)} = (\delta_{20}+x\delta_{21})e^x,\ y_3^{(2,3)} = (\delta_{30}+x\delta_{31})e^x,$$

где числа $\delta_{ij}$ подлежат определению. Подставляя эти решения в исходную систему, получаем (после сокращения на $e^x\neq 0$) равенства

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{11}+\delta_{10}+x\delta_{11} = \delta_{20}+x\delta_{21}+\delta_{30}+x\delta_{31}; \\ &\delta_{21}+\delta_{20}+x\delta_{21} = \delta_{10}+x\delta_{11}+\delta_{20}+x\delta_{21}-\delta_{30}-x\delta_{31}; \\ &\delta_{31}+\delta_{30}+x\delta_{31} = \delta_{20}+x\delta_{21}+\delta_{30}+x\delta_{31}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $x$ слева и справа имеем систему

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11}+\delta_{10} &= \delta_{20}+\delta_{30}; \\ \delta_{11} &= \delta_{21}+\delta_{31}; \\ \delta_{21}+\delta_{20} &= \delta_{10}+\delta_{20}-\delta_{30}; \\ \delta_{21} &= \delta_{11}+\delta_{21}-\delta_{31}; \\ \delta_{31}+\delta_{30} &= \delta_{20}+\delta_{30}; \\ \delta_{31} &= \delta_{21}+\delta_{31}, \end{aligned}\right\}$$

из которой следует, что $\delta_{21}=0$, $\delta_{11}=\delta_{31}$, $\delta_{20}=\delta_{31}$, $\delta_{10}=\delta_{30}$, где $\delta_{10}$ и $\delta_{11}$ — произвольные постоянные. Обозначив их в виде $\delta_{10}=C_2$, $\delta_{11}=C_3$, получим, что решения, отвечающие кратному корню $\lambda_{2,3}=1$, определяются равенствами

$$y_1^{(2,3)} = (C_2+C_3x)e^x;\ y_2^{(2,3)} = C_3e^x;\ y_3^{(2,3)} = (C_2+C_3x)e^x.$$

Общее решение исходной системы записывается в виде

$$y_1 = y_1^{(1)} + y_1^{(2,3)} = 2C_1 + (C_2+C_3x)e^x;$$

$$y_2 = y_2^{(1)} + y_2^{(2,3)} = -C_1 + C_3e^x;$$

$$y_3 = y_3^{(1)} + y_3^{(2,3)} = C_1 + (C_2+C_3x)e^x.$$

**Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Зная фундаментальную систему решений однородной системы $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$, методом вариации произвольных постоянных можно найти общее решение неоднородной системы $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}+\mathbf{f}(x)$, где $A=[a_{ij}]$ — матрица с постоянными коэффициентами $a_{ij}$, а $\mathbf{f}(x)$ — вектор правых частей системы.

**Пример 4.** Решить задачу Коши

$$\left.\begin{aligned} y' &= 4y - 5z + 4x + 1; \\ z' &= y - 2z + x,\ y(0) = z(0) = 0. \end{aligned}\right\}$$

□ Найдем сначала общее решение однородной системы

$$\left.\begin{aligned} y' &= 4y - 5z; \\ z' &= y - 2z. \end{aligned}\right\}$$

Ее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Им отвечают собственные векторы $\vec{\gamma}^1 = (1, 1)^T$, $\vec{\gamma}^2 = (5, 1)^T$. Тогда общее решение однородной системы имеет вид $y = \overline{C}_1 e^{-x} + 5\overline{C}_2 e^{3x}$, $z = \overline{C}_1 e^{-x} + \overline{C}_2 e^{3x}$.

Считая, что $\overline{C}_1 = C_1(x)$, $\overline{C}_2 = C_2(x)$, общее решение исходной неоднородной системы ищем в виде

$$\left.\begin{aligned} y &= C_1(x)\, e^{-x} + 5C_2(x)\, e^{3x}; \\ z &= C_1(x)\, e^{-x} + C_2(x)\, e^{3x}. \end{aligned}\right\} \tag{8.217}$$

Отсюда $y' = C_1'(x)\, e^{-x} - C_1(x)\, e^{-x} + 5C_2'(x)\, e^{3x} + 15C_2(x)\, e^{3x}$, $z' = C_1'(x) e^{-x} - C_1(x)\, e^{-x} + C_2'(x)\, e^{3x} + 3C_2(x)\, e^{3x}$. Подставив $y$, $y'$, $z$, и $z'$ в исходную систему, получим

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\, e^{-x} + 5C_2'(x)\, e^{3x} &= 4x + 1; \\ C_1'(x)\, e^{-x} + C_2'(x)\, e^{3x} &= x, \end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1'(x) = \dfrac{x-1}{4}\, e^{x}$, $C_2'(x) = \dfrac{3x+1}{4}\, e^{-3x}$. Интегрированием находим, что $C_1(x) = \dfrac{x-2}{4}\, e^{x} + C_1$, $C_2(x) = -\dfrac{3x+2}{12}\, e^{-3x} + C_2$.

Таким образом, общее решение неоднородной системы, согласно равенствам (8.217),

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x-2}{4} + C_1 e^{-x} - \frac{5}{12}(3x+2) + 5C_2 e^{3x}; \\ z &= \frac{x-2}{4} + C_1 e^{-x} - \frac{3x+2}{12} + C_2 e^{3x}. \end{aligned}\right\}$$

Используя начальные условия $y(0) = z(0) = 0$, находим $C_1 = 1/2$, $C_2 = 1/6$, так что искомое решение задачи Коши имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y &= -x - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\, e^{-x} + \frac{5}{6}\, e^{3x}; \\ z &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\, e^{-x} + \frac{1}{6}\, e^{3x}. \end{aligned}\right\}$$

**Задачи и упражнения**

1. Решить системы дифференциальных уравнений ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$):

а) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - y + z; \\ \dot{y} &= x + y + z; \\ \dot{z} &= 4x - y + 4z; \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y; \\ \dot{y} &= x + 3y - z; \\ \dot{z} &= -x + 2y + 3z. \end{aligned}\right\}$

2. Систему $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2y - 5x + e^{t}; \\ \dot{y} &= x - 6y + e^{-2t} \end{aligned}\right\}$ решить методом вариации произвольных постоянных.

**Устойчивость решений дифференциальных уравнений по Ляпунову.** Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n);\\ y_2' &= f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n);\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_n' &= f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \qquad (8.218)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \qquad (8.219)$$

где $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$, а $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))^T$.

Будем интерпретировать $x$ как время. Пусть $x = x_0$ — начальный момент времени и

$$(y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}) \Leftrightarrow (\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})) \qquad (8.220)$$

начальные условия. Предположим, что система (8.219) удовлетворяет условиям теоремы 8.10 существования и единственности решения задачи Коши (8.219), (8.220). Потребуем далее, чтобы решение системы (8.219) существовало для всех $x \geqslant x_0$.

Введем следующее определение. Решение $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$, $a_i \in R$, системы $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ называется *точкой покоя*, если $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

В дальнейшем будем рассматривать систему $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, точкой покоя которой является $\mathbf{y} = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Пусть $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x, x_0, \mathbf{y}^0)$ — решение системы (8.219), отвечающее начальному условию $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^0$.

Точка покоя $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ называется *устойчивой по Ляпунову* *, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, такое, что из неравенства $\|\mathbf{y}^0\| < \delta$ вытекает неравенство $\|\mathbf{y}(x)\| = \|\mathbf{y}(x, x_0, \mathbf{y}^0)\| < \varepsilon, \forall x \geqslant x_0$.

Точка покоя $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ называется *асимптотически устойчивой*, если она устойчива и $\lim\limits_{x \to \infty} \mathbf{y}(x, x_0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{0}$.

Геометрически понятие устойчивости покоя $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что фазовая траектория, которая начинается в $\delta$-окрестности точки покоя $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, все время остается в $\varepsilon$-окрестности этой точки (рис. 8.11).

Асимптотическая устойчивость точки покоя геометрически означает следующее: в дополнение к условиям устойчивости все траектории, начинающиеся в $\delta$-окрестности точки покоя $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, стремятся к $\mathbf{0}$ при $x \longrightarrow \infty$ (рис. 8.12).

В общем случае решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ системы $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, определенное для $x \geqslant x_0$, называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что каждое решение $\tilde{\mathbf{y}}(x)$ системы, удовлетворяющее неравенству $\|\tilde{\mathbf{y}}(x_0) - \mathbf{y}(x_0)\| < \delta$, удовлетворяет также неравенству $\|\tilde{\mathbf{y}}(x) - \mathbf{y}(x)\| < \varepsilon$ при $x \geqslant$

* А. М. Ляпунов (1857—1918) — русский математик.

$\geqslant x_0$. Решение $\mathbf{y}(x)$ системы $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ называется асимптотически устойчивым, если в дополнение к устойчивости $\lim\limits_{x\to+\infty}\|\tilde{\mathbf{y}}(x)-\mathbf{y}(x)\|=0$.

В дальнейшем рассматривается устойчивость точки покоя.

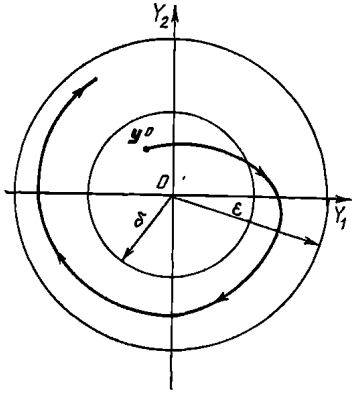



Рис. 8.11

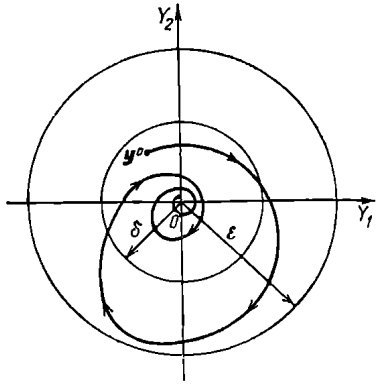



Рис. 8.12

**Простейшие типы точек покоя.** Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными действительными коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} dy_1/dx &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ dy_2/dx &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow (\mathbf{y}' = A\mathbf{y}), \tag{8.221}$$

где матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Точкой покоя этой системы, согласно определению, является точка $(y_1, y_2) = (0, 0)$, удовлетворяющая системе

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 &= 0; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.222}$$

Если определитель системы (8.222) $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то точка покоя (0, 0) единственная.

Так как матрица $A$ имеет действительные элементы, то возможны следующие три случая.

1°. Собственные значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ матрицы $A$ действительные и различные.

2°. Собственные значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$ матрицы $A$ комплексно-сопряженные.

3°. Матрица $A$ имеет единственное действительное собственное значение $\lambda$ кратности два.

Рассмотрим каждый из случаев в отдельности.

1°. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то собственные векторы $\vec{\gamma}^1 = (\gamma_{11}, \gamma_{21})^T$ и $\vec{\gamma}^2 = (\gamma_{12}, \gamma_{22})^T$, отвечающие этим собственным значениям, линейно независимы.

Введем замену

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T\mathbf{z}, \tag{8.223}$$

где $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$; $T = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$ — матрица, столбцы которой составлены из координат собственных векторов $\vec{\gamma}^1$ и $\vec{\gamma}^2$ матрицы $A$.

Замена (8.223) осуществляет переход к новому базису из векторов $\vec{\gamma}^1$ и $\vec{\gamma}^2$, в общем случае не обязательно ортогональному. Эта замена производит поворот осей первоначальной системы координат вокруг точки (0, 0). Подставив $\mathbf{y} = T\mathbf{z}$ в систему $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, получим

$$(T\mathbf{z}' = AT\mathbf{z}) \Leftrightarrow (\mathbf{z}' = (T^{-1}AT)\mathbf{z} = \Lambda\mathbf{z}),$$

где $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Таким образом, в базисе $\vec{\gamma}^1$, $\vec{\gamma}^2$ система (8.221) принимает вид $\mathbf{z}' = \Lambda\mathbf{z}$ или в координатной форме

$$dz_1/dx = \lambda_1 z_1, \quad dz_2/dx = \lambda_2 z_2. \tag{8.224}$$

Решением системы (8.224) являются функции

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \quad z_2 = C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{8.225}$$

Исследование этого решения проведем в зависимости от знаков чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$.

1. Пусть $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Из системы (8.224) имеем

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{z_1}{z_2},$$

откуда, разделяя переменные, получаем

$$z_2 = C z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = C z_1^{\alpha}, \tag{8.226}$$

где $\alpha = \lambda_2/\lambda_1 < 1$, $C = C_1/C_2$ — постоянная. Это уравнение на фазовой плоскости переменных $z_1$, $z_2$ представляет собой кривые (фазовые траектории), вид которых изображен на рис. 8.13. Поскольку $z_1 \longrightarrow \infty$, $z_2 \longrightarrow \infty$ при $x \longrightarrow \infty$, согласно равенствам (8.225), то это означает, что точка удаляется по фазовой траектории от положения равновесия точки (0, 0). Точка покоя (0, 0) в этом случае называется *неустойчивым узлом.*

2. Если $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, то $\alpha = \lambda_2/\lambda_1 > 1$, и в этом случае фазовые траектории $z_2 = Cz_1^{\alpha}$ касаются в точке (0, 0) оси $Z_1$ (рис. 8.14). По-прежнему $\lim\limits_{x\to\infty} z_1 = \infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} z_2 = \infty$.

Заметим, что в случаях 1 и 2 возможно движение от точки покоя (0, 0) по прямым $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, отвечающим константам $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$.

3. Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то, согласно равенству (8.226), характер кривых $z_2 = Cz_1$ не меняется ($\alpha > 0$), но движение по фазовым траекториям в этом случае, как следует из равенств (8.225), осуще-

ствляется по направлению к точке покоя (0, 0), т. е. $\lim_{x\to\infty} z_1 = \lim_{x\to\infty} z_2 = 0$. Точка (0, 0) в этом случае называется *устойчивым узлом* (рис. 8.15).

4. Пусть $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — действительные отличные от нуля числа, имеющие разные знаки. Для определенности положим $\lambda_1 > 0$,

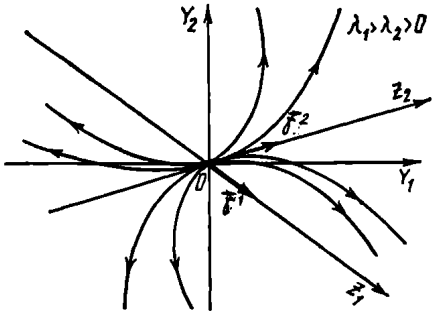


Рис. 8.13

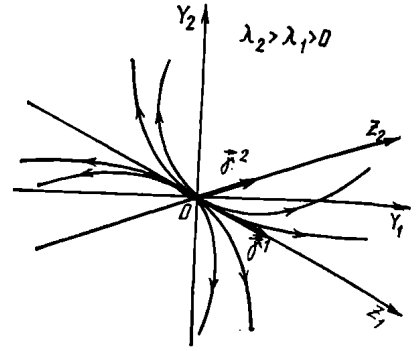


Рис. 8.14

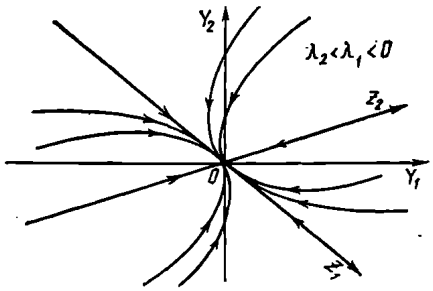


Рис. 8.15

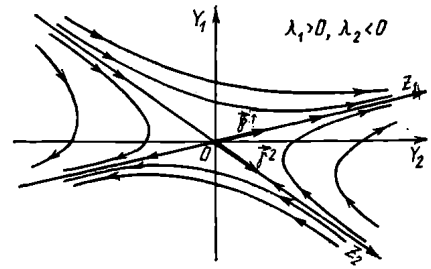


Рис. 8.16

$\lambda_2 < 0$. Из равенств (8.225) следует, что $\lim_{x\to\infty} z_1 = \infty$, а $\lim_{x\to\infty} z_2 = 0$. Отсюда и из равенства (8.226) следует, что фазовые траектории имеют вид, изображенный на рис. 8.16. Точка покоя в этом случае неустойчива и называется седловой точкой или седлом. Заметим, что через седловую точку (0, 0) проходят две фазовые траектории — прямые $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$, отвечающие в равенствах (8.225) константам $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ соответственно. Движение по прямым $z_1 = 0$ осуществляется к точке (0, 0), так как в этом случае уравнения $z_1 = 0$, $z_2 = C_2 e^{\lambda_2 x}$, $\lambda_2 < 0$, определяют параметрически траекторию $z_1 = 0$, вдоль которой $\lim_{x\to\infty} z_2 = 0$.

Движение по прямой $z_2 = 0$ происходит от седловой точки (0, 0). Прямые $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$ называются *сепаратрисами*.

Если $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, то вид фазовых траекторий останется прежним, но движение по ним будет происходить в направлении, противоположном изображенному на рис. 8.16.

5. Одно из собственных чисел матрицы $A$ равно нулю.

Пусть, например, $\lambda_1=0$, $\lambda_2>0$ ($\lambda_2<0$). В этом случае на основании следствия из теоремы 1.31, ч. I, определитель $|A|=\lambda_1\lambda_2=0$, т. е. $\operatorname{rang} A=1$, и система (8.222) в силу пропорциональности строк матрицы $A$ сводится к одному уравнению $a_{11}y_1+a_{12}y_2=0$ (или $a_{21}y_1+a_{22}y_2=0$), имеющему бесчисленное множество решений. Уравнение $a_{11}y_1+a_{12}y_2=0$ при $a_{11}^2+a_{12}^2\neq 0$ на плоскости $Y_1Y_2$ определяет прямую, проходящую через начало координат параллельно собственному вектору $\vec{\gamma}^1$, отвечающему собственному значению $\lambda_1=0$.

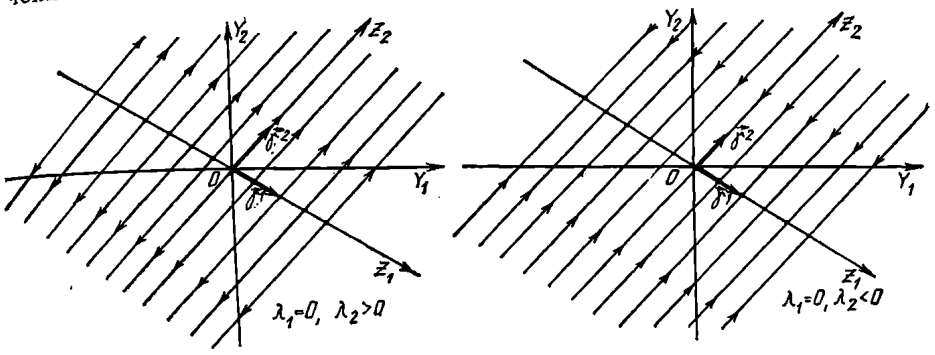



Рис. 8.17

Таким образом, в рассматриваемом случае имеется бесчисленное множество точек покоя, расположенных на прямой $a_{11}y_1+a_{12}y_2=0$.

Исследуем теперь вид фазовых траекторий, отвечающих собственному значению $\lambda_1=0$ и $\lambda_2>0$ ($\lambda_2<0$). В этом случае решения (8.225) имеют вид $z_1=C_1$, $z_2=C_2e^{\lambda_2 x}$ ($C_1$, $C_2$ — const).

На фазовой плоскости переменных $z_1$ и $z_2$ они задают семейство прямых $z_1=C_1$, параллельных оси $Z_2$. Характер движения по этим прямым определяется вторым равенством $z_2=C_2e^{\lambda_2 x}$, из которого следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} z_2=\infty$, если $\lambda_2>0$, и $\lim\limits_{x\to\infty} z_2=\infty$, если $\lambda_2<0$ (рис. 8.17). Таким образом, в случае $\lambda_1=0$, $\lambda_2>0$ ($\lambda_2<0$) движение по фазовым прямым $z_1=C_1$ происходит от прямой (к прямой) $z_2=0$, на которой располагаются точки покоя системы (8.221).

**Пример 1.** Построить фазовые траектории и выяснить характер точки покоя системы

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2-3y_1;\\ y_2' &= y_1-3y_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.227}$$

□ Для нахождения собственных значений матрицы $A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ системы (8.227) составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+6\lambda+8=0.$$

Его корни $\lambda_1=-4<0$, $\lambda_2=-2<0$. Согласно п. 3, точка покоя (0, 0) системы является устойчивым узлом. Для построения фазовых траекторий найдем соб-

ственные векторы $\vec{\gamma}^1=(\gamma_{11}, \gamma_{21})^T$ и $\vec{\gamma}^2=(\gamma_{12}, \gamma_{22})^T$. При $\lambda_1=-4$ из системы $(A-\lambda_1 E)\vec{\gamma}^1=0$ имеем $\gamma_{11}+\gamma_{21}=0$, т. е. $\gamma_{21}=-\gamma_{11}$. Положив $\gamma_{11}=1$, получим $\gamma_{21}=-1$, т. е. $\vec{\gamma}^1=(1, -1)$. Аналогично найдем $\vec{\gamma}^2=(1, 1)$. Заметим, что в рассматриваемом примере $\vec{\gamma}^1$ ортогонален $\vec{\gamma}^2$, что является следствием симметричности матрицы $A$. Осуществляя замену

$$(\mathbf{y}=T\mathbf{z}) \Leftrightarrow \left(\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1+z_2 \\ -z_1+z_2 \end{pmatrix}\right),$$

придем к системе

$$(\mathbf{z}'=\Lambda\mathbf{z}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= -4z_1; \\ z_2' &= -2z_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1 &= C_1e^{-4x}; \\ z_2 &= C_2e^{-2x}. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда, исключив параметр $x$, получим $z_1=(C_1/C_2)z_2^2$, т. е. фазовыми траекториями системы (8.227) на плоскости $Z_1Z_2$ являются параболы (рис. 8.18). Заметим, что плоскость $Z_1Z_2$ получается поворотом фазовой плоскости $Y_1Y_2$ на угол $\pi/4$ вокруг начала координат по часовой стрелке.

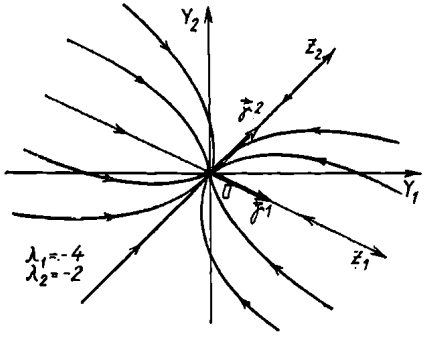



Рис. 8.18

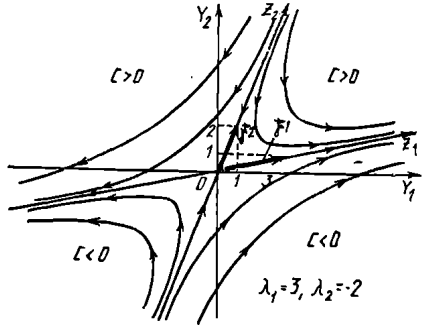



Рис. 8.19

**Пример 2.** Определить характер точки покоя и построить фазовые траектории системы

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 4y_1-3y_2; \\ y_2' &= 2y_1-3y_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.228}$$

□ Корни характеристического уравнения (собственные значения матрицы $A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$) системы равны $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-2$, т. е. точка покоя $(0, 0)$ — седло. Собственные векторы матрицы $A$, отвечающие собственным значениям $\lambda_1$ и $\lambda_2$, равны соответственно $\vec{\gamma}^1=(3, 1)^T$ и $\vec{\gamma}^2=(1, 2)^T$. В системе координат $Z_1Z_2$ система дифференциальных уравнений (8.228) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= 3z_1; \\ z_2' &= -2z_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = C_1e^{3x}; \\ z_2 = C_2e^{-2x}. \end{cases}$$

Отсюда, исключив параметр $x$, найдем фазовые траектории искомой системы (8.228) в виде $(z_1^2z_2^3=C_1^2C_2^3) \Leftrightarrow (z_2=Cz_1^{-2/3})$, где $C$ — произвольная постоянная. Графики этих кривых изображены на рис. 8.19.

$2^\circ$. Пусть $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, $\beta\neq 0$, комплексно-сопряженные собственные значения матрицы $A$ системы (8.221) и $\vec{\gamma}^{1,2}=\mathbf{u}\pm i\mathbf{v}$ — отвечающие им собственные векторы, причем $\mathbf{u}=(u_1, u_2)^T$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2)^T$. В этом случае комплексное решение системы (8.221) имеет вид

$$\mathbf{y}=(\mathbf{u}+i\mathbf{v})\,e^{(\alpha+i\beta)x}=(\mathbf{u}+i\mathbf{v})\,e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)=$$
$$=e^{\alpha x}(\mathbf{u}\cos\beta x-\mathbf{v}\sin\beta x)+ie^{\alpha x}(\mathbf{v}\cos\beta x+\mathbf{u}\sin\beta x).$$

Отсюда получаем действительное решение

$$\mathbf{y}^1=e^{\alpha x}(\mathbf{u}\cos\beta x-\mathbf{v}\sin\beta x);$$
$$\mathbf{y}^2=e^{\alpha x}(\mathbf{v}\cos\beta x+\mathbf{u}\sin\beta x).$$

Тогда общее решение

$$\mathbf{y}=C_1\mathbf{y}^1+C_2\mathbf{y}^2=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

системы (8.221) можно записать в виде

$$\begin{cases}y_1=e^{\alpha x}(C_1'\cos\beta x+C_2'\sin\beta x);\\ y_2=e^{\alpha x}(C_1''\cos\beta x+C_2''\sin\beta x),\end{cases}\qquad(8.229)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, а $C_1'$, $C_2'$, $C_1''$ и $C_2''$ — некоторые их линейные комбинации.

Обозначим

$$\rho^2=y_1^2+y_2^2=e^{2\alpha x}\left[(C_1'\cos\beta x+C_2'\sin\beta x)^2+(C_1''\cos\beta x+C_2''\sin\beta x)^2\right].\qquad(8.230)$$

Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть $\mathrm{Re}\lambda_{1,2}=\alpha=0$. Тогда из уравнений (8.229) следует, что $y_1$ и $y_2$ являются периодическими функциями периода $2\pi/\beta$. Это означает, что на плоскости $Y_1Y_2$ фазовые траектории системы (8.221) представляют собой непересекающиеся замкнутые кривые (эллипсы), причем при изменении $x$ на величину периода $T=2\pi/\beta$ точка $M$, находящаяся на плоскости в исходном положении и движущаяся по конкретной фазовой траектории, возвращается в это положение (рис. 8.20). Ясно, что в этом случае $\rho^2=y_1^2+y_2^2\neq 0$, т. е. точка покоя (0, 0) устойчива, но не является асимптотически устойчивой. Такая точка покоя называется *центром*.

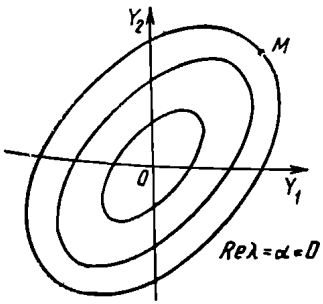



Рис. 8.20

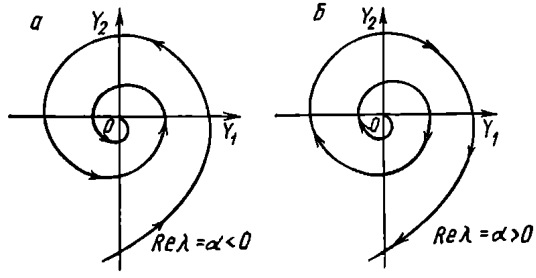



Рис. 8.21

2. Пусть $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}=\alpha<0$ ($\alpha>0$). Тогда в силу ограниченности множителя в квадратной скобке равенства (8.230) $\lim\limits_{x\to\infty}\rho=0$ $(+\infty)$, т. е. при изменении $x$ на величину периода $2\pi/\beta$ величина $\rho$ уже не возвращается к прежнему значению, а уменьшается (увеличивается) в соответствии с $\alpha<0$ или $\alpha>0$. В этом случае на фазовой плоскости получаются не замкнутые, а спиралевидные кривые, причем при $\alpha<0$ спираль закручивается в точку (0, 0), являющуюся асимптотически устойчивой (рис. 8.21, *а*). При $\alpha>0$ с возрастанием $x$ спираль расходится из точки (0, 0) (рис. 8.21, *б*). Точка покоя, отвечающая комплексно-сопряженным собственным значениям $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, $\alpha\neq 0$, называется *фокусом*. При $\alpha<0$ фокус (0,0) асимптотически устойчив, при $\alpha>0$ — неустойчив.

**Пример 3.** Определить характер точки покоя и построить фазовые траектории системы

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -y_1+5y_2;\\ y_2' &= -y_1+y_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.231}$$

□ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 5\\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+4=0$$

имеет корни $\lambda_{1,2}=\pm 2i$. Следовательно, точка покоя (0, 0) — **центр.** Собственный вектор $\vec{\gamma}=\mathbf{u}+i\mathbf{v}$, соответствующий корню $\lambda=2i$, равен

$$\vec{\gamma}=\begin{pmatrix} 5\\ 1+2i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},$$

т. е. $\mathbf{u}=(5,1)^T$, $\mathbf{v}=(0,2)^T$. Комплексным решением системы (8.231) будет

$$\mathbf{y}=(\mathbf{u}+i\mathbf{v})\,e^{2ix}=(\mathbf{u}+i\mathbf{v})(\cos 2x+i\sin 2x)=(\mathbf{u}\cos 2x-\mathbf{v}\sin 2x)+$$
$$+i(\mathbf{v}\cos 2x+\mathbf{u}\sin 2x).$$

Отсюда находим два действительных решения

$$\mathbf{y}^1=\mathbf{u}\cos 2x-\mathbf{v}\sin 2x,\quad \mathbf{y}^2=\mathbf{v}\cos 2x+\mathbf{u}\sin 2x.$$

Общее же решение системы имеет вид

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=C_1\mathbf{y}^1+C_2\mathbf{y}^2=C_1(\mathbf{u}\cos 2x-\mathbf{v}\sin 2x)+C_2(\mathbf{v}\cos 2x+\mathbf{u}\sin 2x)=$$
$$=C_1\left[\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\cos 2x-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2x\right]+C_2\left[\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2x+\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\sin 2x\right],$$

т. е.

$$y_1=5C_1\cos 2x+5C_2\sin 2x;$$
$$y_2=(C_1+2C_2)\cos 2x+(C_2-2C_1)\sin 2x.$$

Из этих равенств элементарными преобразованиями найдем, что

$$y_1/5=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x;$$
$$(y_2-y_1)/2=C_2\cos 2x-C_1\sin 2x,$$

откуда

$$y_1^2/25+(y_2-y_1)^2/4=C_1^2+C_2^2. \tag{8.232}$$

Введем замену $y_1=z_1$, $y_2-y_1=z_2$, т. е.

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1\\z_1+z_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=T\mathbf{z},\ \text{где}\ \mathbf{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}.$$

Из матрицы $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ следует, что в системе координат $Z_1Z_2$, имеющей базисные векторы (1, 1) и (0, 1) в системе координат $Y_1Y_2$, уравнение (8.232) записывается в виде $\frac{z_1^2}{25} + \frac{z_2^2}{4} = C_1^2 + C_2^2$, т. е. фазовыми траекториями системы (8.231) являются эллипсы в аффинной (в общем случае неортогональной) системе координат $Z_1Z_2$.

3°. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ — действительное собственное значение матрицы $A$ системы (8.221) кратности два. В этом случае, согласно равенствам (8.216), общее решение системы (8.221) имеет вид

$$\begin{cases} y_1(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{\lambda x}; \\ y_2(x) = (C_1' + C_2' x)\, e^{\lambda x}, \end{cases} \tag{8.233}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные, а $C_1'$ и $C_2'$ — некоторые их линейные комбинации.

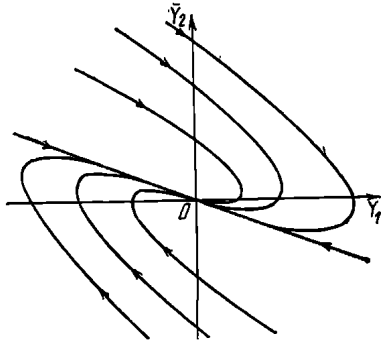



Рис. 8.22

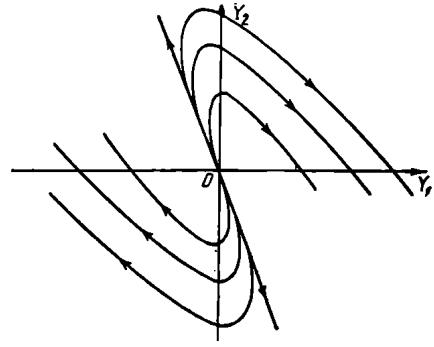



Рис. 8.23

1. Пусть $\lambda < 0$. Тогда из формул (8.233) следует, что $\lim\limits_{x \to +\infty} y_1(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} y_2(x) = 0$. В этом случае движение по фазовой траектории осуществляется к точке покоя (0, 0), которая называется *устойчивым узлом* (рис. 8.22).

2. Если $\lambda > 0$, то, двигаясь по фазовой траектории, точка уходит в бесконечность. Точка покоя в этом случае называется неустойчивым узлом (рис. 8.23).

**Пример 4.** Определить характер точки покоя и изобразить фазовые траектории системы $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1; \\ y_2' &= y_2. \end{aligned}\right\}$

□ Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$ имеет кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$. Так как $\lambda > 0$, то точка покоя (0, 0) есть неустойчивый узел. Решение $y_1 = C_1 e^x$, $y_2 = C_2 e^x$ системы определяет на плоскости $y_1 y_2$ семейство прямых $y_2 = C y_1$ $(C = C_2/C_1)$, проходящих через

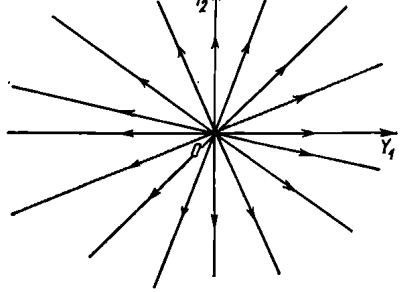
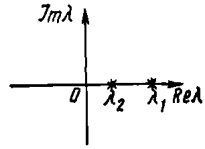
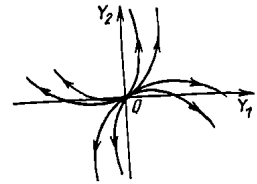
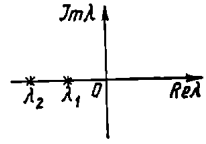
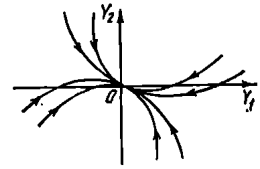
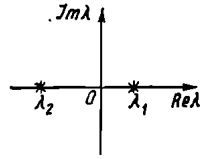
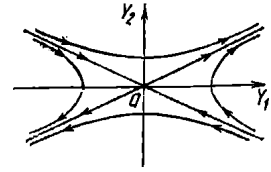
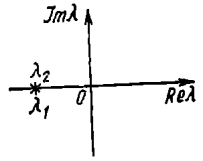
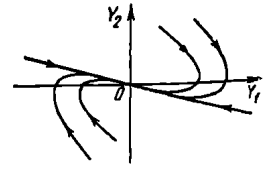
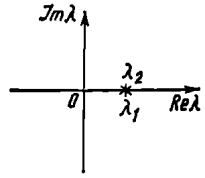
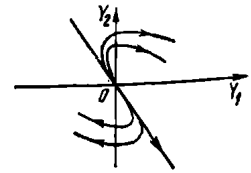


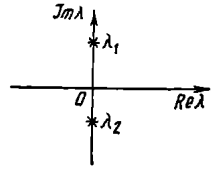
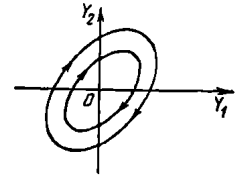
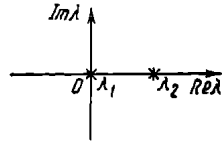
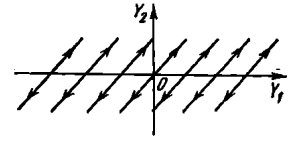
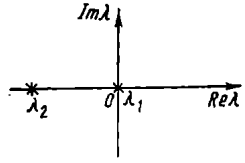
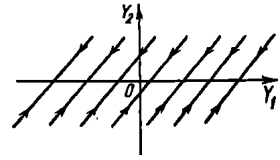
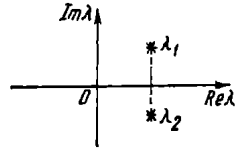
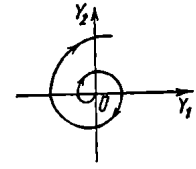
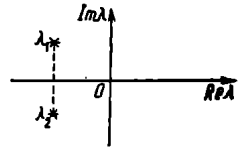
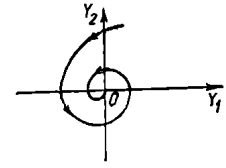

Рис. 8.24

начало координат. Движение по ним происходит от точки покоя (0, 0), которая в этом случае называется *дикритическим узлом* (рис. 8.24).

Полученные выше результаты классификации точек покоя системы двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами сведем в следующую таблицу.

**Таблица видов простейших точек покоя**

| Точка покоя | Собственные значения | Фазовые траектории |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| Неустойчивый узел |  |  |
| Устойчивый узел |  |  |
| Седло |  |  |
| Устойчивый узел |  |  |
| Неустойчивый узел |  |  |

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| Центр |  |  |
| Неустойчивая |  |  |
| Устойчивая |  |  |
| Неустойчивый фокус |  |  |
| Устойчивый фокус |  |  |

**Критерии устойчивости линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ с постоянными коэффициентами. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $A$. Справедлива следующая

**Теорема 8.16.** 1°. Если все собственные значения $\lambda_i$ матрицы $A$ имеют отрицательные действительные части, т. е. $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то точка покоя $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ асимптотически устойчива.

2°. Если хотя бы один корень $\lambda_k$ имеет положительную действительную часть, т. е. $\mathbf{Re}\lambda_k > 0$, то точка покоя $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ неустойчива.

3°. Если собственные значения с нулевой действительной частью являются простыми, а остальные собственные значения, если

они есть, имеют отрицательную действительную часть, то точка покоя $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ системы $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$ устойчива по Ляпунову, но не асимптотически устойчива.

Доказательство теоремы опускаем. Приведем примеры.

**Пример 5.** Исследовать на устойчивость по Ляпунову точку покоя системы $y_1'=-y_2$, $y_2'=y_1+Ry_2$.

□ Матрица $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & R\end{bmatrix}$ системы имеет собственные значения $\lambda_{1,2}=-\frac{R}{2}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4}-1}$. Если $R<0$, то по крайней мере одно из собственных значений имеет положительную действительную часть. В этом случае точка покоя (0, 0) системы неустойчива. Если же $R>0$, то оба собственных значения имеют отрицательную действительную часть и поэтому точка покоя (0, 0) асимптотически устойчива. Если $R=0$, то действительные части собственных значений $\lambda_{1,2}=\pm i$ равны нулю. В этом случае точка покоя устойчива по Ляпунову, но не асимптотически устойчива.

**Пример 6.** Исследовать на устойчивость по Ляпунову точку покоя (0, 0) системы $y_1'=y_2$, $y_2'=-4y_1$.

□ Собственные значения матрицы $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}$ этой системы равны $\lambda_{1,2}=\pm 2i$. Согласно 3° теоремы 8.16, точка покоя системы устойчива, но не асимптотически устойчива. В самом деле, решение системы имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1&=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x;\\ y_2&=2C_1\sin 2x-2C_2\cos 2x.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда нетрудно получить, что фазовыми траекториями системы являются эллипсы $4y_1^2+y_2^2=4\left(C_1^2+C_2^2\right)$, т. е. точка покоя (0, 0) есть центр для исходной системы.

Таким образом, точка покоя (0, 0) исходной системы устойчива по Ляпунову, но не асимптотически устойчива.

**Критерии устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (8.231)$$

с постоянными коэффициентами заменой (8.182) сводится к системе $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$ с матрицей

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & (-a_1-\lambda)\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая этот определитель по элементам первого столбца, получаем

$$-\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & (-a_1-\lambda) \end{vmatrix} + (-1)^n a_n = 0.$$

Поступив с получившимся определителем аналогичным образом, найдем, что характеристическое уравнение приводится к виду

$$(-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0,$$

т. е. собственными значениями матрицы $A$ являются корни характеристического уравнения $L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, составленного в силу дифференциального уравнения (8.231).

С учетом замены (8.182) получаем следующий вывод: исследование на устойчивость решения $y = y(x)$ уравнения (8.231) равносильно исследованию на устойчивость точки покоя

$$(\mathbf{y} = \mathbf{0}) \Leftrightarrow ((y, y', \dots, y^{(n-1)})^T = (0, 0, \dots, 0)^T)$$

системы (8.182), где первая координата $y = y(x)$ вектора $\mathbf{y}$ есть решение исходного дифференциального уравнения (8.231).

В таком случае, согласно теореме 8.16, имеет место

**Теорема 8.17.** 1°. Если все корни $\lambda_i$ характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ имеют отрицательные действительные части, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то решения уравнения (8.231) асимптотически устойчивы.

2°. Если $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ хотя бы для одного $i$, то решения (8.231) неустойчивы.

3°. Если корни $\lambda_i$ характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ имеют неположительные действительные части, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant 0$, причем корни с нулевыми действительными частями простые, то решения уравнения (8.231) устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически устойчивы.

**Пример 7.** Найти область устойчивости решений дифференциального уравнения $y'' + ky' + (1-k)y = 0$.

□ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + k\lambda + (1-k) = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{k^2+4k-4}}{2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2+4(k-1)}}{2}$. Отсюда следует, что при всех $k < 0$ действительные части обоих корней положительны, т. е. в этом случае решения уравнения неустойчивы. При $k > 1$ корень $\lambda_1 = \frac{-k+\sqrt{k^2+4(k-1)}}{2} > 0$, т. е. и в этом случае решения неустойчивы. При $k = 0$ решения устойчивы, поскольку собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm i$. При $k = 1$ собственные значения суть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ и, значит, решения устойчивы. Если же $0 < k < 1$, то решения асимптотически устойчивы, так как в этом случае $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$.

**Устойчивость по первому приближению.** Пусть дана автономная система $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, т. е.

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{8.232}$$

причем функции $f_i$ непрерывно дифференцируемы и $(0, 0, \dots, 0)^T$ — точка покоя системы. Разложим правые части $f_i$ по формуле Тей-

лора в окрестности точки $\mathbf{0}=(0, 0, \ldots, 0)^T$. С учетом того, что $f_i(0, 0, \ldots, 0)=0$, будем иметь

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(0)}{\partial y_j}y_j+R_i(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ i=1, 2, \ldots, n, \tag{8.233}$$

где $R_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ имеют порядок выше первого относительно величины $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}$. Если в равенстве (8.233) отбросить $R_i$, то вместо системы (8.232) получим линейную систему

$$y_i'=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(0)}{\partial y_j}y_j,\ i=1, 2, \ldots, n \tag{8.234}$$

или в матричном виде $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$, где

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(0)}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(0)}{\partial y_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial f_n(0)}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial f_n(0)}{\partial y_n}\end{bmatrix}. \tag{8.235}$$

Система (8.234) называется *системой первого приближения* для системы (8.232).

**Пример** 8. Построить систему первого приближения для системы

$$\left.\begin{aligned}y_1'&=-10y_1+4e^{y_2}-4\cos y_2^2;\\ y_2'&=2e^{y_1}-2-y_2+y_1^4.\end{aligned}\right\} \tag{8.236}$$

□ Построим матрицу $A$. Так как $f_1=-10y_1+4e^{y_2}-4\cos y_2^2$, $f_2=2e^{y_1}-2-y_2+y_1^4$, то по формуле (8.235) получим

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}\end{bmatrix}_{\substack{y_1=0\\ y_2=0}}=\begin{bmatrix}-10 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix},$$

и искомая система первого приближения имеет вид

$$\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1'=-10y_1+4y_2;\\ y_2'=2y_1-y_2.\end{cases} \tag{8.237}$$

Понятие устойчивости точки покоя системы (8.232) связано с малой окрестностью начала координат в фазовом пространстве. Естественно ожидать, что поведение решений этой системы будет определяться во многом главными членами разложения $f_i$ в окрестности точки $\mathbf{0}$, т. е. поведением точки покоя системы первого приближения (8.234).

Имеет место следующее утверждение, которое мы приведем без доказательства.

**Теорема 8.18** (Ляпунова). Точка покоя $\mathbf{0}$ нелинейной автономной системы $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ асимптотически устойчива, если асимптотиче-

ски устойчива точка покоя линейной системы первого приближения $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$. Если существует собственное значение матрицы $A$ системы первого приближения с положительной вещественной частью, то точка покоя $\mathbf{0}$ нелинейной системы $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ неустойчива.

**Пример 9.** Исследовать на устойчивость точку покоя системы (8.236).

□ Характеристическое уравнение системы первого приближения

$$\begin{vmatrix} -10-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+11\lambda+2=0$$

имеет корни $\lambda_{1,2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{113}}{2}<0$. Следовательно, точка покоя системы (8.233) асимптотически устойчива, а значит, точка покоя системы (8.236) тоже асимптотически устойчива.

*Замечание.* Если точка покоя системы первого приближения $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$ устойчива, но не асимптотически устойчива, то установить устойчивость точки покоя $\mathbf{0}$ нелинейной системы $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ невозможно в общем случае, используя лишь систему первого приближения, так как в этом случае начинают влиять нелинейные члены разложений (8.233).

**Пример 10.** Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя системы

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2+y_1\left(y_1^2+y_2^4\right); \\ y_2' &= -y_1+y_2\left(y_1^2+y_2^4\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.238}$$

□ Системой первого приближения для данной является

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2; \\ y_2' &= -y_1, \end{aligned}\right\} \tag{8.239}$$

матрица которой $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2}=\pm i$.

По теореме 8.16 точка покоя системы (8.239) устойчива, но не асимптотически устойчива. Поэтому об устойчивости точки покоя системы (8.238) по первому приближению ничего сказать нельзя. Позже эта система будет исследована на устойчивость другим методом.

**Метод функций Ляпунова.** Метод функций Ляпунова позволяет непосредственно исследовать на устойчивость точку покоя нелинейной системы $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ с помощью соответствующим образом подобранной функции $V=V(\mathbf{y})$, называемой *функцией Ляпунова* для данной системы.

Введем предварительно понятие знакоопределенности функции. Функция $V=V(y_1, y_2, \ldots, y_n)=V(\mathbf{y})$ называется *положительно определенной* в окрестности $U(0)$ начала координат, если она непрерывная, обладает непрерывными частными производными в этой окрестности и если $V(\mathbf{y})>0$, $\forall y\in U(\mathbf{0})$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, и $V(\mathbf{0})=0$. Аналогично функция $V(\mathbf{y})$ называется *отрицательно определенной* в окрестности $U(\mathbf{0})$, если она непрерывная, обладает непрерывными частными производными в этой окрестности и если $V(y)<0, \forall\mathbf{y}\in U(\mathbf{0})$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, и $V(\mathbf{0})=0$. Положительно и отрицательно определенные функции называются *знакоопределенными.*

Функция $V(\mathbf{y})$ называется *неотрицательно определенной* или *знакоположительной* в окрестности $U(\mathbf{0})$, если она непрерывная, имеет непрерывные частные поизводные в $U(\mathbf{0})$ и если $V(\mathbf{y})\geqslant 0$,

$\forall \mathbf{y} \in U(\mathbf{0})$, и равна нулю в точке $\mathbf{y}=\mathbf{0}$, а также по крайней мере еще в одной точке окрестности $U(\mathbf{0})$. Функция $V(\mathbf{y})$ называется *неположительно определенной* или *знакоотрицательной* в окрестности $U(\mathbf{0})$, если она непрерывна, имеет непрерывные частные производные в $U(\mathbf{0})$ и если $V(\mathbf{y}) \leqslant 0$, $\forall \mathbf{y} \in U(\mathbf{0})$, и равна нулю при $\mathbf{y}=\mathbf{0}$, а также по крайней мере еще в одной точке окрестности $U(\mathbf{0})$. Неположительно и неотрицательно определенные функции называются *знакопостоянными*. Функция, не являющаяся ни знакоопределенной, ни знакопостоянной, называется *знакопеременной*.

**Пример 11.** Функция $V(\mathbf{y}) = y_1^4 + 2y_2^4 + 5y_3^2$ является положительно определенной в $\mathbf{R}^3$, так как она положительна всюду, кроме начала координат, где обращается в нуль.

**Пример 12.** Функция $V(\mathbf{y}) = (y_1 + y_2)^2 + y_3^2$ является неотрицательно определенной в $\mathbf{R}^3$, так как она равна нулю в начале координат и на прямой $y_1 + y_2 = 0$, $y_3 = 0$.

**Пример 13.** Функция $V(\mathbf{y}) = -y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_1y_2 - y_3^2 = -(y_1 + y_2)^2 - y_2^2 - y_3^2$ является отрицательно определенной в $\mathbf{R}^3$, так как $V(\mathbf{y}) < 0$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ и $V(\mathbf{0}) = 0$.

**Пример 14.** Функция $V(\mathbf{y}) = -(y_1 - y_2)^2 - y_3^2$ является неположительно определенной функцией в $\mathbf{R}^3$, так как она отрицательна всюду, кроме точек прямой $y_1 - y_2 = 0$, $y_3 = 0$, где она обращается в нуль.

**Пример 15.** Функция $V(\mathbf{y}) = y_1^2 - 3y_2^2 + y_3^2$ является знакопеременной в $\mathbf{R}^3$.

Пусть $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ — решение автономной системы

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow y_i' = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

а $V(\mathbf{y})$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда производная функции $V(\mathbf{y})$ по времени $x$ вдоль решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$ системы $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ имеет вид

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}(x)} = \frac{\partial V}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial V}{\partial y_2} y_2' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_n} y_n' = \frac{\partial V}{\partial y_1} f_1(\mathbf{y}) +$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial y_2} f_2(\mathbf{y}) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y_n} f_n(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_j} f_j(\mathbf{y}). \qquad (8.240)$$

Величина $dV/dx$, определяемая формулой (8.240), называется *полной производной функции* $V(\mathbf{y})$ *по времени* $x$, *составленной в силу системы* $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$.

Положительно определенная в окрестности $U(\mathbf{0})$ функция $V(\mathbf{y})$ называется *функцией Ляпунова для системы* $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, если ее полная производная $dV/dx$, составленная в силу системы $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, является знакопостоянной в этой окрестности, т. е.

$$dV(\mathbf{y})/dx \leqslant 0 \text{ или } dV(y)/dx \geqslant 0, \quad \forall \mathbf{y} \in U(\mathbf{0}).$$

Сформулируем теперь теорему, доказанную А. М. Ляпуновым.

**Теорема 8.19.** Пусть $\mathbf{f}(0)=0$. Тогда

1°. Если в окрестности $U(0)$ для системы $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ существует функция Ляпунова $V(\mathbf{y})$, такая, что ее полная производная $dV/dx$, составленная в силу системы, является неположительно определенной, т. е. $dV/dx\leqslant 0$, то точка покоя $\mathbf{0}$ системы устойчива.

2°. Если полная производная $dV/dx$, составленная в силу системы $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$, является отрицательно определенной функцией в $U(0)$, то точка покоя $\mathbf{0}$ системы асимптотически устойчива.

Теорема Ляпунова устанавливает достаточные условия устойчивости точки покоя системы. Существуют теоремы о неустойчивости точки покоя системы. Сформулируем одну из них.

**Теорема 8.20** (Ляпунова о неустойчивости). Пусть $\mathbf{f}(0)=0$. Тогда если в окрестности $U(0)$ для системы $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$ существует функция $V(\mathbf{y})$ Ляпунова, такая, что ее полная производная $dV/dx$, составленная в силу системы $\mathbf{y}'=\mathbf{f}(\mathbf{y})$, является положительно определенной функцией в $U(0)$, то точка покоя $\mathbf{0}$ системы неустойчива.

**Пример 16.** Колебание математического маятника описывается уравнением $y''+ky'+\frac{g}{L}\sin y=0$, $k>0$, где $g$ — ускорение силы тяжести. Исследовать на устойчивость решение $y=0$.

□ Полагая $y=y_1$, $y_2=y_1'$, перейдем от уравнения к системе

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2;\\ y_2' &= -ky_2-\frac{g}{L}\sin y_1 \end{aligned}\right\}$$

с точкой покоя $(0, 0)$.

Рассмотрим функцию $V(y_1, y_2)=\frac{g}{L}(1-\cos y_1)+\frac{y_2^2}{2}$. Очевидно, что $V(y_1, y_2)>0$ для всех $y_1$, $y_2$ при $|y_1|<2\pi$ ($V(y_1, y_2)=0$ лишь при $y_1=y_2=0$). Кроме того, $\frac{dV}{dx}=\frac{g}{L}\sin y_1\cdot y_2+y_2\left(-ky_2-\frac{g}{L}\sin y_1\right)=-k^2<0$. Таким образом, $V(y_1, y_2)$ — функция Ляпунова для рассматриваемой системы. По теореме 8.19 получаем, что точка покоя $(0, 0)$ асимптотически устойчива.

**Пример 17.** Исследовать на устойчивость точку покоя системы (8.238).

□ Определим функцию Ляпунова следующим образом: $V(y_1, y_2)=\frac{y_1^2+y_2^2}{2}$. Тогда вдоль решений системы $\frac{dV}{dx}=(y_1^2+y_2^2)(y_1^2+y_2^4)$. По теореме Ляпунова 8.20 точка покоя $(0, 0)$ неустойчива. Заметим, что метод, использующий систему первого приближения, не позволил определить характер устойчивости решений этой системы (см. пример 10).

### Задачи и упражнения

**1.** Исследовать на устойчивость решение уравнения $y'=-2y+2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=3$.

□ Решением искомой задачи Коши является функция $y=2e^{-2x}+1$. При любом другом начальном условии $y(0)=\widetilde{y}_0$ решение имеет вид $\widetilde{y}=(\widetilde{y}_0-1)e^{-2x}+1$. Рассмотрим очевидное неравенство

$$|y-\tilde{y}| = e^{-2x}|\tilde{y}_0 - 3| \leqslant |\tilde{y}_0 - 3|, \ \forall x \geqslant 0.$$

Из него следует, что при $\delta = \varepsilon$ из неравенства $|\tilde{y}_0 - 3| < \delta$ вытекает неравенство $|y - \tilde{y}| < \varepsilon$, т. е. решение $y = 2e^{-2x} + 1$ устойчиво. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}(\tilde{y} - y) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}(\tilde{y}_0 - 3) = 0$, то это решение асимптотически устойчиво.

2. Исследовать на устойчивость по определению решение дифференциального уравнения $y' = -a^2 y$, $a \neq 0$, $y = y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

3. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = -a^2 y_1 - 2b y_2. \end{cases}$$

4. Определить характер точки покоя и построить фазовые траектории системы $y_1' = -2y_1 - y_2$, $y_2' = 3y_1 - y_2$.

5. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя системы $y_1' = 2y_1 + 8\sin y_2$, $y_2' = 2 - e^{y_1} - 3y_2 - \cos y_2$.

6. Исследовать на устойчивость по первому приближению точки покоя уравнения $y' = -\sin y$.

7. Исследовать на устойчивость точку покоя систем:

а) $\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_2 - y_3; \\ y_2' &= 3y_1 - 2y_3; \\ y_3' &= 5y_1 - 4y_2; \end{aligned}\right\}$ б) $\left.\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 + 5y_3; \\ y_2' &= -2y_2 + y_3; \\ y_3' &= -3y_3. \end{aligned}\right\}$

8. Выяснить знакоопределенность функций:

а) $V(y_1, y_2) = |y_1| \cos y_2 + y_2^2$; б) $V(y_1, y_2) = \sin^2 y_1 + \sin^2 y_2$.

9. С помощью функций Ляпунова $V$ исследовать на устойчивость точку покоя систем:

а) $\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 + 3y_1^2 y_2^2 - 4y_1^5; \\ y_2' &= -y_1 + y_2^3 + y_1^3 y_2; \end{aligned}\right\}$ $V = \dfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$;

б) $\left.\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + y_1 y_2 - y_1^3 - \dfrac{1}{2} y_1 y_2^2; \\ y_2' &= -3y_2 + y_1 y_2 + y_1^2 y_2 - \dfrac{1}{2} y_1 y_2^2; \end{aligned}\right\}$ $V = \dfrac{1}{2}(3y_1^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2)$.

# 9. РЯДЫ

## 9.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**Понятие числового ряда и его суммы.** Рассмотрим числовую последовательность

$$(a_n) = a_1,\ a_2\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Составим из нее новую последовательность $(S_n)$ следующим образом:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$
$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots \tag{9.1}$$

обозначается символом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и называется *числовым рядом*. Числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$, ... называются *членами ряда*, а число $a_n$ — $n$-м членом или *общим членом ряда*. Сумма $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называется $n$-й *частичной суммой ряда* (9.1).

Числовой ряд (9.1) называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм $(S_n)$ сходится к некоторому числу $S$, которое называется *суммой* этого *ряда*. Итак, по определению, ряд (9.1) сходится к сумме $S$, если

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \tag{9.2}$$

В этом случае пишут

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S. \tag{9.3}$$

Если предел последовательности $(S_n)$ не существует или равен бесконечности, то ряд (9.1) называется *расходящимся*.

**Пример 1.** Рассмотрим *геометрическую прогрессию*

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \ldots,\ a_1q^{n-1},\ \ldots$$

Сумма ее первых $n$ членов равна

$$S_n = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{9.4}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q|<1$, а при $|q|>1$ этот предел равен $\infty$, то из равенства (9.4) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q}$, $|q|<1$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ сходится при $|q|<1$ и его сумма определяется формулой

$$S = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

При $|q| \geqslant 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ расходится.

**Пример 2.** Пусть дана последовательность $a_n = (-1)^{n-1}$. Ей отвечает ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1},$$

частичные суммы которого равны $S_1=1$, $S_2=0=1-1$, $S_3=1$, $S_4=0$, ... Таким образом, последовательность частичных сумм имее вид

$$S_n = \begin{cases} 1, & n = 2k-1; \\ 0, & n = 2k, \ k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Поскольку эта последовательность предела не имеет, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ расходится.

**Пример 3.** Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\,n}. \qquad (9.5)$$

□ Общий член $\dfrac{1}{(n-1)\,n}$ этого ряда представим в виде $\dfrac{1}{(n-1)\,n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$. Тогда

$$S_n = (1/1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) + \ldots + (1/(n-2) - 1/(n-1)) + (1/(n-1) - 1/n) = 1 - 1/n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-1/n) = 1$, то искомый ряд (9.5) сходится и его сумма $S=1$.

**Пример 4.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{14}{49n^2 - 56n - 33}$.

□ Так как $49n^2 - 56n - 33 = (7n-11)(7n+3)$, то, разложив общий член ряда на простейшие дроби, получим

$$\frac{14}{49n^2 - 56n - 33} = 4\left(\frac{1}{7n-11} - \frac{1}{7n+3}\right).$$

В таком случае

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{14}{49k^2 - 56k - 33} = 4\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{7k-11} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{7k+3}\right).$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7k-11}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{7n-11}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+$$

$$+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{7k-11}=\frac{1}{12}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{7k-11}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7k+3}=\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{7n-11}+\frac{1}{7n-4}+\frac{1}{7n+3}=$$

$$=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{7k-11}+\frac{1}{7n-4}+\frac{1}{7n+3},$$

то

$$S_n=4\left(\frac{1}{12}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{7k-11}-\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{7k-11}-\frac{1}{7n-4}-\frac{1}{7n+3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{7n-4}-\frac{4}{7n+3}.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{7n-4}-\frac{4}{7n+3}\right)=\frac{1}{3}$. Таким образом, исходный ряд сходится и сумма $S=1/3$.

**Пример 5.** Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-n}{n^3+4n^2+3n}$.

Разложим общий член ряда на простейшие дроби:

$$\frac{3-n}{n^3+4n^2+3n}=\frac{3-n}{n(n+1)(n+3)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+3}.$$

В таком случае

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3-k}{k^3+4k^2+3k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{n+1};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{11}{6}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3},$$

то

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{11}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{6},$$

т. е. сумма исходного ряда $S = 1/6$.

*Суммой двух рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

*Произведением ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *на* действительное *число* $\alpha$ называется ряд

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n).$$

Пусть ряд (9.1) сходится к сумме $S$. Перепишем равенство (9.3) в виде $S_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = S$ и обозначим $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ Это выражение, представляющее собой новый ряд, называется *остатком ряда* (9.1). Таким образом, для сходящегося ряда (9.1) имеет место равенство

$$S = S_n + r_n. \tag{9.6}$$

Справедлива следующая

**Теорема 9.1.** Для того чтобы ряд (9.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Доказательство теоремы вытекает из определения суммы ряда и равенства (9.6).

**Простейшие свойства числовых рядов.** 1°. Сходимость ряда не нарушится, если произвольным образом изменить (переставить, добавить или отбросить) конечное число членов ряда.

Это свойство утверждает, что если ряд был сходящимся (расходящимся) до одной из перечисленных операций, то и после нее он будет сходящимся (расходящимся), хотя сумма его, естественно, может измениться.

2°. Сходящийся ряд можно почленно умножить на любой множитель $\alpha$, т. е. если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет сумму $S$, то ряд $\alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots + \alpha a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ имеет сумму $\alpha S$.

□ Действительно, из того, что $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, получаем $\alpha a_1 + \alpha a_2 + \ldots + \alpha a_n = \alpha S_n$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha S_n = \alpha S$. ■

3°. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т. е. если даны ряды $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=S_a$ и $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=S_b$, то ряд $(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\ldots+(a_n\pm b_n)+\ldots$ сходится к $S_a\pm S_b$.

□ В самом деле, если $S_a=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ и $S_b=\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\ldots+b_n)$, то

$$\lim_{n\to\infty}[(a_1\pm b_1)+\ldots+(a_n\pm b_n)]=\lim_{n\to\infty}(a_1+\ldots+a_n)\pm$$
$$\pm\lim_{n\to\infty}(b_1+\ldots+b_n)=S_a\pm S_b.\ \blacksquare$$

**Пример 6.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n(1+q^n)$, $|q|<1$.

□ Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n(1+q^n)=\sum_{n=0}^{\infty}(q^n+q^{2n})=\sum_{n=0}^{\infty}q^n+\sum_{n=1}^{\infty}(q^2)^n.$$

Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(q^2)^n$ представляют собой суммы геометрических прогрессий со знаменателем $q$ и $q^2$ соответственно. Их суммы равны $S_1=\dfrac{1}{1-q}$ и $S_2=\dfrac{1}{1-q^2}$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n(1+q^n)$ сходится при $|q|<1$ и его сумма $S=S_1+S_2=\dfrac{2+q}{1-q^2}$.

**Необходимое условие сходимости ряда. Теорема 9.2** (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \tag{9.7}$$

□ Пусть $S$ — сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$. Так как $a_n=S_n-S_{n-1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$. $\blacksquare$

Итак, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то всегда выполнено условие (9.7). Отсюда следует, что если условие (9.7) не выполнено, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится. Это является *достаточным условием*, или *признаком расходимости ряда*.

Условие (9.7) не является достаточным условием сходимости ряда, т. е. из выполнения равенства (9.7) не обязательно вытекает сходимость ряда.

**Пример 7.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}. \tag{9.8}$$

□ Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$. Необходимое условие сходимости (9.7) для данного ряда выполнено. Тем не менее ряд (9.8) расходится. Действительно,

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n} =$$
$$= \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\ldots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, т. е. ряд (8.8) расходится.

**Пример 8.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$.

**Критерий Коши сходимости ряда.** Критерий Коши сходимости последовательности (теорема 2.5, ч. I) сформулируем применительно к рядам.

**Теорема 9.3** (критерий Коши). Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $(S_n)$ была последовательностью Коши, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N$, такой, чтобы для любых $n \geqslant N$ и любых $p > 0$ выполнялось неравенство

$$(|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon) \Leftrightarrow (|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon). \qquad (9.9)$$

Доказательство теоремы вытекает из определения сходимости ряда и критерия Коши сходимости последовательности $(S_n)$.

**Пример 9.** Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \qquad (9.10)$$

□ Ряд (9.10) называется *гармоническим.*

Для этого ряда необходимое условие сходимости выполнено, так как его общий член $1/n$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Однако ряд (9.10) расходится. Действительно, для любого $n$ и $p = n$ имеем

$$a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

т. е. для $\varepsilon \leqslant 1/2$ и $p = n$ неравенство (9.9) не выполняется. Следовательно, *гармонический ряд расходится.*

**Пример 10.** Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \qquad (9.11)$$

□ При любом $n$ и $p$ имеем $|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots +$

$$+\frac{1}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+p)}\right] <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^p}\right] < \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^p}+\ldots\right] = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)}$$

(здесь использована формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/(n+2)$).

Итак, $|S_{n+p} - S_n| < \dfrac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)} = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется номер $N$, такой, что $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, т. е. ряд (9.11) сходится. Впоследствии будет доказано, что его сумма равна $e$.

**Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.** Пусть задан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами $a_n \geqslant 0$. Исследуем вопрос о его сходимости или расходимости.

Так как частичные суммы ряда с неотрицательными членами образуют неубывающую последовательность, то этот ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность $(S_n)$ его частичных сумм ограничена.

Сформулируем и докажем следующие признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

**Теорема 9.4** (признак сравнения). Пусть для членов рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ имеет место неравенство

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n \tag{9.12}$$

(для всех $n$ или начиная с некоторого $n$). Тогда:

1) если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

□ Признак утверждает, что при выполнении условия (9.12) из сходимости ряда с бóльшими членами вытекает сходимость ряда с меньшими членами, а из расходимости ряда с меньшими членами вытекает расходимость ряда с бóльшими членами.

1. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и $S$ — его сумма. Из соотношения (9.12) следует неравенство $S_n' \leqslant S_n'' \leqslant S$, где $S_n'$ — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а $S_n''$ — частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Из этого неравенства вытекает ограниченность сверху частичных сумм $S_n'$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В таком случае неубывающая последовательность $(S_n')$ имеет предел, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Если бы при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходился, то по только что доказанному должен сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что противоречит условию. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. ■

При выполнении условий (9.21) будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ является *мажорантным рядом*, или *мажорантой* для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, или что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Теорема 9.5** (предельный признак сравнения). Пусть члены рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ положительны и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0,\ L \neq \infty. \tag{9.13}$$

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

□ Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда равенство (9.13) означает, что, начиная с некоторого номера $N$, выполняется неравенство

$$L - \varepsilon < a_n/b_n < L + \varepsilon,\ n \geqslant N,$$

или, так как $b_n > 0$, неравенство

$$(L - \varepsilon)\, b_n < a_n < (L + \varepsilon)\, b_n,\ n \geqslant N. \tag{9.14}$$

Поэтому если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (L + \varepsilon)\, b_n$, а значит, на основании признака сравнения и свойства 2° сходящихся рядов сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Аналогично, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (L - \varepsilon)\, b_n$, т. е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (L - \varepsilon)\, b_n$, а следовательно, в силу неравенства (9.14) и теоремы 9.4, будет расходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Аналогично доказывается, что из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. ■

**Пример 11.** Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

□ Так как $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)\,n}$ и, как показано в примере 3, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\,n}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

**Пример 12.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3+5}$.

□ Так как $a_n = \frac{2n+3}{n^3+5} = \frac{\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{5}{n^3}} = O(1/n^2)$, $n \to \infty$, то сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n^3+5} : \frac{1}{n^2}\right) = 2$, то по предельному признаку сравнения исходный ряд сходится.

**Пример 13.** Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{1}{n} \Big/ \frac{1}{n}\right) = 1$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

**Пример 14.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin(3+(-1)^n)/4}{2^n+n}$.

□ Так как $0 < \arcsin\frac{3+(-1)^n}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\arcsin(3+(-1)^n)/4}{2^n+n} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$. Из этого неравенства и из сходимости геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ по признаку сравнения вытекает сходимость исходного ряда.

**Теорема 9.6** (признак Д'Аламбера). Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L. \tag{9.15}$$

Тогда:
1) при $L<1$ ряд сходится;
2) при $L>1$ ряд расходится.

□ 1) Пусть $L<1$. Тогда для любого $\varepsilon>0$, начиная с некоторого номера $N$, выполнено неравенство

$$L-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L+\varepsilon, \quad n \geqslant N. \tag{9.16}$$

Возьмем $\varepsilon$ таким, чтобы число $q=L+\varepsilon<1$ (для этого достаточно взять $\varepsilon$ из интервала $(0,1-L)$. Из соотношения (9.16) при $n\geqslant N$ вытекают неравенства

$$\begin{aligned} &a_{N+1}<qa_N;\\ &a_{N+2}<qa_{N+1}<q^2a_N;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{N+p}<q^pa_N,\ \forall p\in N. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Так как ряд $a_Nq+a_Nq^2+\ldots+a_Nq^p+\ldots$ при $q<1$ сходится, то из неравенств (9.17) по признаку сравнения сходится и ряд $a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots+a_{N+p}+\ldots$ Поскольку конечное число членов не влияет на характер сходимости ряда, то отсюда заключаем, что сходится и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

2) Если $L>1$, то возьмем $\varepsilon>0$ таким, чтобы число $q=L-\varepsilon>1$. Тогда из соотношения (9.16) вытекает, что

$$a_{N+p}>(L-\varepsilon)^pa_N=q^pa_N,\ \forall_p\in N.$$

Так как ряд $\sum\limits_{p=0}^{\infty}a_Nq^p$ расходится при $q>1$, то отсюда по признаку сравнения расходится и ряд $\sum\limits_{p=0}^{\infty}a_{N+p}$, а значит, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. ■

**Пример 15.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^nn!}{n^n}$.

□ Так как $a_n=\dfrac{2^nn!}{n^n}$, $a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=$

$=\dfrac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+(1/n))^n}=\dfrac{2}{e}<1$, то исходный ряд сходится. ■

*Замечание 1.* Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $L=1$. Для примера рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Для каждого из них $L=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится.

**Теорема 9.7** (признак Коши). Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n>0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L. \tag{9.18}$$

Тогда:

1) при $L<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

2) при $L>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

□ 1) Пусть $L<1$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ из соотношения (9.18) следует, что существует номер $N$, такой, что выполнено неравенство

$$L-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<L+\varepsilon,\ n\geqslant N,$$

или

$$(L-\varepsilon)^n<a_n<(L+\varepsilon)^n,\ n\geqslant N. \tag{9.19}$$

Отсюда при $\varepsilon>0$, таком, что $L+\varepsilon=q<1$, получаем, что ряд $a_N+a_{N+1}+\ \dots\ +a_{N+p}+\ \dots$ мажорируется сходящимся рядом $q^N+q^{N+1}+\ \dots\ +q^{N+p}+\ \dots$ Тогда по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{p=0}^{\infty}a_{N+p}$ сходится, а значит, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

2) Если $L>1$, то при $q=L-\varepsilon>1$, что возможно при $\varepsilon\in(0, L-1)$, из неравенства (9.19) получаем $a_n>1$, $n\geqslant N$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится по необходимому признаку сходимости. ■

**Пример 16.** Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^2=\frac{9}{16}<1.$$

Поэтому исходный ряд сходится.

*Замечание 2.* Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся числовые ряды, для которых $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$. Например, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n^2}=1$ (см. пример 4 § 2.2, ч. I). Ряд же $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^2$ сходится.

**Теорема 9.8** (Коши). Если $a_1\geqslant a_2\geqslant\ \dots\ \geqslant 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+16a_{16}+\ \dots$$

□ Так как, по условию,

$$\begin{aligned}
&a_2\leqslant a_2\leqslant a_1;\\
&2a_4\leqslant a_3+a_4\leqslant 2a_2;\\
&4a_8\leqslant a_5+a_6+a_7+a_8\leqslant 4a_1;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&2^n a_{2^{n+1}}\leqslant a_{2^n+1}+\ \dots\ +a_{2^{n+1}}\leqslant 2^n a_{2^n},
\end{aligned}$$

то, сложив эти неравенства, получим

$$0{,}5\left(A_{2n}-a_1\right)\leqslant S_{2n+1}-a_1\leqslant A_{2n}, \tag{9.20}$$

где $S_k=a_1+a_2+\ldots+a_k$, $A_{2^n}=a_1+2a_2+\ldots+2^n a_{2^n}$ — частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$ соответственно. Так как последовательности $(S_n)$ и $(A_{2^n})$ неубывающие, то из неравенств (9.20) следует, что они либо одновременно ограничены и, следовательно, сходятся, либо неограничены и, значит, расходятся. Отсюда и заключаем, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$ либо одновременно сходятся, либо расходятся. ■

**Пример 17.** Исследовать на сходимость ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

□ Если $p\leqslant 0$, то $1/n^p\geqslant 1$, $\forall n\in N$. В этом случае не выполнено необходимое условие сходимости ряда, т. е. ряд Дирихле при $p\leqslant 0$ расходится.

Пусть $p>0$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}=\sum_{k=0}^{\infty}2^k\frac{1}{(2^k)^p}=\sum_{k=0}^{\infty}2^{(1-p)k}. \tag{9.21}$$

Он расходится, если $(1-p>0)\Leftrightarrow(p<1)$, так как при этом ряд (9.21) представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q=2^{1-p}>1$. При $p>1$ ряд (9.21) сходится, так как в этом случае $p=2^{1-p}<1$.

Таким образом, на основании теоремы Коши заключаем, что *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *сходится при* $p>1$ *и расходится при* $p\leqslant 1$.

**Пример 18.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}. \tag{9.22}$$

□ Так как при $n\to\infty$

$$\sin\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}\sim\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}\sim\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}}\sim\frac{1}{n^{4/3}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}\right)\Big/\frac{1}{n^{4/3}}=1,$$

то ряд (9.22) сходится по предельному признаку сравнения в силу сходимости ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}\left(p=\frac{4}{3}>1\right)$.

**Теорема 9.9** (интегральный признак Коши). Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ имеют вид $a_n=f(n)$, где $f(x)$ — неотрицательная монотонно

убывающая функция на промежутке $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

□ Из условий теоремы для $k-1 \leqslant x \leqslant k$ имеем $a_{k-1} \geqslant f(x) \geqslant a_k$, $k \geqslant 2$ (рис. 9.1).

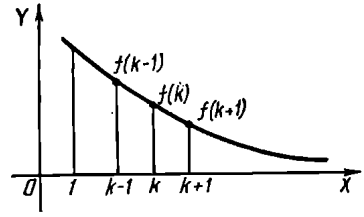


Рис. 9.1

Интегрируя это неравенство от $k-1$ до $k$, получаем

$$a_{k-1} \geqslant \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant a_k, \quad k \geqslant 2. \quad (9.23)$$

Просуммировав неравенства (9.23) от $k=2$ до $k=n$, найдем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \geqslant \int\limits_1^n f(x)\,dx \geqslant a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

или

$$S_n - a_n \geqslant \int\limits_1^n f(x)\,dx \geqslant S_n - a_1. \quad (9.24)$$

Пусть $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, т. е. существует конечный предел $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$. Из неравенства (9.24) следует, что монотонная последовательность частичных сумм $(S_n)$ ряда ограничена $(S_n \leqslant a_1 + I)$ и, значит, сходится, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ расходится, то из неравенства $S_n \geqslant a_n + \int\limits_1^n f(x)\,dx$ вытекает, что последовательность $(S_n)$ не ограничена и, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Аналогично из неравенства (9.24) следует, что если сходится (расходится) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится (расходится) интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ (подробное доказательство предоставляется провести читателю). ■

Интегральный признак Коши позволяет оценить остаток $r_n$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Действительно, из неравенства (9.24) в случае сходимости ряда $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \geqslant \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx \geqslant S - a_1$.

Отсюда

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx \leqslant S \leqslant \int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx + a_1.$$

Заменив здесь 1 на $n+1$ (тогда $S$ надо заменить на $r_n$), получим

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant r_n \leqslant \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx + a_{n+1}. \tag{9.25}$$

Формула (9.25) и дает искомую оценку остатка сходящегося ряда.

*Замечание.* Нетрудно видеть, что если $a_n$ удовлетворяет условию $a_n = f(n)$, начиная с некоторого номера $n = k > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_{k}^{\infty} f(x)\,dx$.

**Пример 19.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

□ Положим $f(x) = 1/(x \ln x)$. Тогда $a_n = f(n) = 1/(n \ln n)$. Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[2, +\infty]$ и монотонно убывает на нем. Так как несобственный интеграл

$$\int_{2}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_{2}^{\infty} = \infty,$$

т. е. расходится, то в соответствии с интегральным признаком Коши расходится и ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

**Пример 20.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}. \tag{9.26}$$

□ Непосредственное применение здесь интегрального признака приводит к исследованию интеграла $\int\limits_{3}^{\infty} \dfrac{dx}{(3x-5)\ln^2(4x-7)}$, что является трудоемкой задачей. Поэтому поступим иначе. Так как $4n - 7 > 3n - 5$, $\forall n \geqslant 3$, то

$$\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)} < \frac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)}. \tag{9.27}$$

Исследуем теперь сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)}$ интегральным признаком. Положим $f(x) = 1/((3x-5)\ln^2(3x-5))$. Нетрудно видеть, что $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[3, +\infty]$. Имеем далее

$$\int_{3}^{\infty} \frac{dx}{(3x-5)\ln^2(3x-5)} = \frac{1}{3}\int_{3}^{\infty} \frac{d\ln(3x-5)}{\ln^2(3x-5)} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\ln(3x-5)}\Big|_{3}^{\infty} = \frac{1}{6\ln 2},$$

т. е. несобственный интеграл сходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-5)\ln^2(3n-5)}$ то-

же сходится. В таком случае из неравенства (9.27) по признаку сравнения вытекает сходимость ряда (9.26).

**Пример 21.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n}$.

□ Так как при $n \to \infty$ $\frac{1}{(3n-1)\ln n} \sim \frac{1}{3n \ln n}$ и $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{3x \ln x} = \frac{1}{3} \ln \ln x \Big|_2^{\infty} =$ $= \infty$, то исходный ряд расходится по предельному признаку сравнения.

**Пример 22.** Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ с точностью до 0,01.

□ Для данного ряда $f(x) = 1/x^2$. Согласно оценке (9.25), имеем

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leqslant r_n \leqslant \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ т. е. } \frac{1}{n+1} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Отсюда, потребовав, чтобы $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{100}$, получаем $n \geqslant 9$. Итак, с точностью до 0,01 сумма ряда

$$S \approx S_9 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} = 1{,}42.$$

**Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.** Ряды, знаки членов которых, вообще говоря, изменяются, называются *знакопеременными*. Особый интерес представляет случай, когда знакопеременный ряд содержит бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Составим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*.

Так как $|a_n + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_n| + \ldots + |a_{n+p}|$, то из критерия Коши следует, что *если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

**Пример 23.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1}$ сходится абсолютно, так как

$\left| \frac{1}{2^n} \sin \frac{\pi n}{n+1} \right| \leqslant \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится.

Исследование на сходимость знакопеременного ряда означает выяснение характера его сходимости, т. е. сходится ряд или расходится, а в случае сходимости — абсолютно или условно.

Сформулируем достаточные признаки абсолютной сходимости рядов.

Признак сравнения. Пусть для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n > 0$, имеет место неравенство $|a_n| \leqslant b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно.

Признак Д'Аламбера. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, то:

1) при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно;

2) при $L > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Признак Коши. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, то:

1) при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно;

2) при $L > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство этих признаков почти дословно повторяет доказательство соответствующих признаков для рядов с положительными членами.

**Пример 24.** Исследовать на абсолютную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!}$ ($a$ — произвольное постоянное число).

□ По признаку Д'Аламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a^{n+1}| \cdot n!}{(n+1)!\,|a^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0 < 1,$$

т. е. исходный ряд сходится абсолютно при любом $a$.

Так как ряд сходится, то по необходимому условию сходимости его общий член стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{9.28}$$

Заметим, что равенство (9.28) получено ранее в примере 5 § 2.2, ч. I.

**Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.** Частным случаем знакопеременных рядов являются *знакочередующиеся ряды*, т. е. ряды вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots, \tag{9.29}$$

где $a_n$, $n = 1, 2, \ldots$,— числа одного знака.

Для знакочередующихся рядов справедлива следующая

**Теорема 9.10** (признак Лейбница). Пусть дан знакочередующийся ряд (9.29), в котором $a_n>0$, $n=1, 2, \ldots$ Если:

1) $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд (9.28) сходится. Сумма его не превосходит первого члена, а остаток ряда $r_n$ удовлетворяет неравенству

$$|r_n| \leqslant a_{n+1}. \tag{9.30}$$

□ Рассмотрим частичную сумму ряда (9.29) с четным номером

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Так как $a_n \geqslant a_{n+1}$, то выражения в круглых скобках этого равенства неотрицательны. Поэтому $S_{2n} \leqslant S_{2n+2}$, т. е. последовательность $(S_{2n})$ неубывающая. Покажем, что она ограничена сверху. В самом деле, так как

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - \\ - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},\ a_{2n} > 0,$$

и разности в круглых скобках неотрицательны, то $S_{2n} < a_1$. Таким образом, последовательность $(S_{2n})$ сходится, т. е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Рассмотрим теперь частичные суммы этого ряда с нечетными номерами, т. е. суммы $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = S$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ по условию.

Из вышеизложенного следует, что суммой ряда (9.29) является число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1}$. Далее, так как $S_{2n} < a_1$, то сумма ряда удовлетворяет неравенству

$$S \leqslant a_1. \tag{9.31}$$

Рассмотрим теперь остаток ряда $r_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots)$, представляющий собой новый знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы. Тогда его сумма на основании оценки (9.31) удовлетворяет неравенству $|r_n| \leqslant a_{n+1}$. ■

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 9.10, будем называть *рядом Лейбница*.

Формула (9.30) дает *оценку остатка ряда Лейбница*.

**Пример 25.** Установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^3}$ и найти его сумму с точностью до 0,01.

□ Данный ряд сходится, как ряд Лейбница. Согласно неравенству (9.30), имеем $|r_n| \leqslant a_{n+1} = \dfrac{1}{1+(n+1)^3} \leqslant 0{,}01$. Это неравенство справедливо, начиная с $n=4$, т. е. сумма ряда $S = S_4 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{28} + \dfrac{1}{65} = 0{,}59$.

**Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.** 1°. Пусть ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно к $A$ и $B$ соответственно. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ также сходится абсолютно и его сумма $S=A+B$.

Доказательство этого свойства следует из неравенства $|a_n+b_n|\leqslant |a_n|+|b_n|$, признака сравнения и свойства 3° сходящихся рядов.

2°. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно к $A$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha a_n$ также сходится абсолютно и его сумма $S=\alpha A$.

Это свойство очевидно.

Введем понятие произведения рядов. *Произведением рядов* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ (по Коши) называется ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\ \dots\ +a_{n-1}b_1+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}. \quad (9.32)$$

3°. Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно и сумма его равна $A$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится к сумме $B$. Тогда произведение этих рядов сходится и сумма его $S=AB$.

□ Обозначим через $A_n$, $B_n$ и $C_n$ частичные суммы рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ соответственно, и пусть $\beta_n=B_n-B$. Тогда

$$\begin{aligned}C_n &= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\\ &+\dots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)=\\ &=a_0B_n+a_1B_{n-1}+\dots+a_nB_0=\\ &=a_0(B+\beta_n)+a_1(B+\beta_{n-1})+\dots+a_n(B+\beta_0)=\\ &=A_nB+a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\dots+a_n\beta_0.\end{aligned}$$

Обозначим $\gamma_n=a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\dots+a_n\beta_0$. Тогда

$$C_n=A_nB+\gamma_n. \quad (9.33)$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$. Положим $\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$ по условию, то для заданного $\varepsilon>0$ можно указать номер $N$, такой, что $|\beta_n|=|B_n-B|\leqslant\varepsilon$, $n\geqslant N$. Тогда

$$\begin{aligned}|\gamma_n| &= |\beta_0a_n+\dots+\beta_Na_{n-N}+\beta_{N+1}a_{n-N+1}+\dots+\beta_na_0|\leqslant\\ &\leqslant|\beta_0a_n+\dots+\beta_Na_{n-N}|+|\beta_{N+1}a_{n-N+1}+\dots+\beta_na_0|\leqslant\\ &\leqslant|\beta_0a_n+\dots+\beta_Na_{n-N}|+\varepsilon\alpha.\end{aligned}$$

Зафиксировав $N$ и устремив $n$ к $\infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}|\gamma_n|\leqslant\varepsilon\alpha$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\right.$ в силу сходимости ряда $\left.\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$. В таком случае из равенства (9.33) получаем

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} A_n B + \lim_{n\to\infty} \gamma_n = AB,$$

т. е. сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ равна $AB$. ■

4°. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится условно. Тогда оба ряда, составленные только из положительных и только из отрицательных членов этого ряда, расходятся.

□ Обозначим $p_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$, $q_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$ Тогда $a_n = p_n - q_n$, $|a_n| = p_n + q_n$, $n = 0, 1, \ldots$, причем $p_n = 0$, $q_n = |a_n|$ при $a_n < 0$ и $p_n = |a_n|$, $q_n = 0$ при $a_n > 0$. Следовательно, ряд $\left(-\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n\right)$ составлен из отрицательных членов ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ — из положительных членов ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n - \sum_{n=0}^{\infty} q_n. \tag{9.34}$$

Если предположить, что один из рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ или $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$ сходится, то из равенства (9.34) вытекает сходимость и второго из этих рядов в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. В таком случае ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$ тоже сходится, т. е. ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ должен сходиться абсолютно, что противоречит предположению. Следовательно, оба ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n$ расходятся. ■

Известно, что сумма конечного числа слагаемых не зависит от перестановки этих слагаемых в сумме. Возникает вопрос, сохраняется ли это свойство для бесконечного числа слагаемых, т. е. для рядов.

**Пример 26.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots, \tag{9.35}$$

сходящийся, как ряд Лейбница. Этот ряд сходится условно, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

Если $S$ — сумма ряда (9.35), то $S < 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$. Переставим члены ряда (9.35) так, чтобы за двумя положительными членами следовал один отрицательный. Получим ряд

$$\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\ldots \qquad (9.36)$$

Так как $\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}>\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}-\frac{1}{2n}=0$, то видно, что частичные суммы $S_3'$, $S_6'$, $S_9'$, ... ряда (9.36) связаны неравенствами $S_3'<S_6'<S_9'<\ldots$, т. е. сумма $S'$ ряда (9.36) удовлетворяет неравенству $S'>S_3'=5/6$. Пришли к противоречию: $S'<5/6$, $S>5/6$.

Итак, перестановка членов условно сходящегося ряда (9.35) изменила величину его суммы.

Следующие свойства связаны с перестановкой членов ряда.

5°. **Теорема 9.11** (Дирихле). Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно и его сумма равна $S$. Этот ряд остается сходящимся и не меняет величины суммы $S$ при любой перестановке его членов.

□ Обозначим через $S_n$ и $S_n'$ частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ и ряда с переставленными членами соответственно. Для произвольного числа $\varepsilon>0$ существует число $N$, такое, что $|S_n-S|<\varepsilon$, $n\geqslant N$. Для этого $N$ найдем число $\overline{N}$, такое, чтобы каждый член суммы $S_n$ входил в сумму $S_n'$. Тогда для числа $K\geqslant\overline{N}$ разность $S_k-S_k'$ содержит лишь члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ с номером $n$, большим $N$, т. е. $|S_k-S_k'|<R_N$, где $R_N$ — остаток ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно, то $|S_k-S_k'|<R_n<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}S_k'=\lim\limits_{n\to\infty}S_k=S$. ■

6°. **Теорема 9.12** (Римана). Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится условно, то для любого наперед заданного числа $A$ существует перестановка членов ряда, такая, что сумма полученного ряда равна $A$.

Доказательство теоремы можно найти в книге Р. Куранта «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. I (М.: Наука, 1967).

**Ряды с комплексными членами.** Пусть $z_n=a_n+ib_n$ — комплексное число. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}z_n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+ib_n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n+i\sum_{n=0}^{\infty}b_n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ называется *действительной частью*, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ — *мнимой частью* ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_n$ называется *сходящимся*, если последовательность

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

его частичных сумм сходится к некоторому (комплексному) числу $S$, которое называется *суммой ряда*, т. е. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Так как $(S_n)$ — последовательность комплексных чисел, то она будет сходящейся в том и только в том случае, если сходятся обе последовательности $(\operatorname{Re} S_n)$ и $(\operatorname{Im} S_n)$ (теорема 6.1, ч. II). Отсюда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится, если сходятся его действительная и мнимая части. Например, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-i}{n^3+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$$

сходится, так как сходятся ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n + ib_n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Из неравенств $|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqslant |a_n| + |b_n|$, $|b_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqslant |a_n| + |b_n|$ следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся абсолютно его действительная и мнимая части.

Основные свойства сходящихся и абсолютно сходящихся рядов с действительными членами сохраняются и для рядов с комплексными членами. Перечислим их.

1°. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

2°. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно, то он сходится.

3° (признак сравнения). Если для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ с положительными членами, такой, что $|z_n| \leqslant c_n$, начиная с некоторого номера $N$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно.

4° (признак Д'Аламбера). Если $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$, то:

1) при $L < 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно;

2) при $L > 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ расходится.

5° (признак Коши). Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$, то:

1) при $L < 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно;

2) при $L > 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ расходится.

**Пример 27.** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e-i)^n}$.

□ По признаку Д'Аламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}n!\,(e-i)^n}{(n+1)!(e-i)^{n+1}n^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{|e-i|} =$$

$$= \frac{e}{|e-i|} = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1,$$

т. е. исходный ряд сходится абсолютно.

**Задачи и упражнения**

**1.** Найти сумму ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2-12n-35}$; б) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}$.

**2.** Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится ($a_n \geqslant 0$). Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходится. Показать, что обратное утверждение неверно.

**3.** Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |b_n|$ сходится

**4.** Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5n)!}{2^{n^2}} = 0$.

**5.** При каком $p$ сходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_a n)^p}$, $a > 1$?

**6.** Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \sin\frac{\pi}{2^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

**7.** Исследовать на абсолютную сходимость ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

8. Вычислить сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{(n^3+1)^2}$ с точностью до 0,001.

9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\,(2n+i)^n}{4n}$.

## 9.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

**Функциональный ряд и его область сходимости.** *Функциональным рядом* называется ряд вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \ \ldots\ + u_n(x) + \ \ldots\ = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{9.37}$$

где $u_n(x)$ — функции, определенные на некотором множестве $X$. Сумма

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ \ldots\ + u_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

называется $n$-й *частичной суммой ряда*, а выражение

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ \ldots\ = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) —$$

*остатком ряда* (9.37).

При каждом конкретном $x_0 \in X$ функциональный ряд (9.37) превращается в числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Если этот числовой ряд сходится, то говорят, что функциональный ряд (9.37) сходится в точке $x_0$. Совокупность значений $x \in X$, при которых функциональный ряд (9,37) сходится, называется *областью сходимости* этого ряда. Обозначим ее через $D$. Сходимость функционального ряда в каждой точке $x \in D$ называется *поточечной сходимостью.*

*Суммой ряда* (9.37) называется функция

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x). \tag{9.38}$$

Эта функция определена для всех $x$ из области сходимости $D$ ряда. Для сходящегося ряда имеем $S(x) = S_n(x) + r_n(x)$, причем $r_n(x) \longrightarrow 0$, если $n \longrightarrow \infty$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

**Пример 1.** Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\,(1-x)^n, \ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{9.39}$$

□ Пусть $S(x)$ — сумма данного ряда. Очевидно, $S(0) = S(1) = 0$. Для $0 < x < 1$ ряд (9.39) представляет сумму бесконечно убывающей геометрической

прогрессии $S(x)=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ со знаменателем $q=1-x$, т. е. $S(x)=$

$=x\dfrac{1}{1-(1-x)}=1,\ 0<x<1.$

Таким образом, сумма ряда (9.39) есть

$$S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\ x=1;\\ 1, & 0<x<1.\end{cases}$$

Хотя каждая из функций $u_n(x)=x(1-x)^n$ является непрерывной на отрезке [0, 1], тем не менее сумма ряда $S(x)$ оказалась разрывной функцией.

Для определения области сходимости функционального ряда можно использовать признаки сравнения Коши и Д'Аламбера. Этими признаками функциональный ряд исследуется на абсолютную сходимость. Например, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=L(x)\ \text{ или }\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=L(x),$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится абсолютно для $x$, удовлетворяющих неравенству $L(x)<1$, и расходится для тех $x$, при которых $L(x)>1$.

**Пример 2.** Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$.

□ По признаку Коши имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|x|^n}{n}}=|x|$. При $|x|<1$ ряд сходится абсолютно, при $|x|>1$ ряд расходится. В точке $x=1$ получаем расходящийся гармонический ряд, а в точке $x=-1$ — условно сходящийся ряд Лейбница.

Таким образом, областью сходимости исходного ряда является множество $[-1, 1]$

**Пример 3.** Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-x^2)^n$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|2-x^2|^{n+1}}{|2-x^2|^n}=|2-x^2|.$$

Отсюда по признаку Д'Аламбера ряд сходится абсолютно, если $|2-x^2|<$ $<1\Leftrightarrow 1<x^2<3\Leftrightarrow 1<|x|<\sqrt{3}$, и расходится, если $|2-x^2|>1\Leftrightarrow(-\infty<$ $<x<-\sqrt{3})\cup(-1<x<1)\cup(\sqrt{3}<x<+\infty)$. В точках $x=\pm1$ и $x=$ $=\pm\sqrt{3}$ получаем расходящиеся числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ соответственно.

Итак, областью абсолютной сходимости исходного функционального ряда являются интервалы $(-\sqrt{3}, -1)$ и $(1, \sqrt{3})$.

**Пример 4.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+x^2}$ сходится на всей числовой прямой по признаку сравнения, так как $\left|\dfrac{1}{n^2+x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходящийся.

**Пример 5.** Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2+\cos x}$ расходится при всех $x$, так как $\left|\frac{1}{n+2+\cos x}\right| > \frac{1}{n+3}$, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ расходится.

**Равномерная сходимость функциональных рядов.** Основным вопросом теории функциональных рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ является вопрос о свойствах суммы $S(x)$ ряда в зависимости от свойств членов $u_n(x)$ этого ряда. Возникают вопросы: 1) если члены ряда $u_n(x)$ — непрерывные функции, то будет ли $S(x)$ тоже непрерывной функцией; 2) если члены ряда интегрируемые (дифференцируемые) функции на некотором отрезке $[a, b]$, принадлежащем области $D$ сходимости ряда, то будет ли сумма ряда интегрируемой (дифференцируемой) функцией на этом отрезке и применимо ли при этом правило «интеграл (производная) суммы равен сумме интегралов (производных)»?

В примере 1 показано, что хотя члены ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ непрерывные функции, но сумма этого ряда оказалась разрывной на отрезке [0, 1]. Рассмотрим еще один пример. Члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 9x}{9} + \ldots,$$

который сходится абсолютно для всех $x \in \mathbf{R}$ ($|\sin n^2x/n^2| \leqslant 1/n^2$), являются гладкими функциями. Однако ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n^2 x = \cos x + \cos 4x + \cos 9x + \ldots,$$

образованный из производных членов исходного ряда, расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n^2 x \neq 0$.

Приведенные примеры показывают, что сумма функционального ряда в общем случае не наследует свойств членов ряда. Когда же сумма функционального ряда является функцией непрерывной, интегрируемой или дифференцируемой? Для ответа на этот вопрос введем понятие равномерной сходимости функционального ряда.

Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится* в области $D$ к сумме $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, не зависящий от $x \in D$, такой, что

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D, \ \forall n \geqslant N. \tag{9.40}$$

Условие (9.40) равномерной сходимости функционального ряда равносильно

$$|r_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D, \forall n \geqslant N. \tag{9.41}$$

**Пример 6.** Доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{10n-2}$ на отрезке $[0, 1]$.

□ Произведем оценку модуля остатка ряда. Имеем

$$|r_n(x)|=\left|\frac{x^{n+1}}{10n+8}-\frac{x^{n+2}}{10n+18}+\ldots\right|.$$

Выражение под знаком модуля есть ряд Лейбница, сумма которого по абсолютной величине не превосходит первого слагаемого, т. е. $|r_n(x)|\leqslant\frac{x^{n+1}}{10n+8}\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{10n+8}$, $\forall x\in[0, 1]$. Отсюда $\left(\frac{1}{10n+8}<\varepsilon\right)\Leftrightarrow\left(n>\frac{1-8\varepsilon}{10\varepsilon}\right)$, т. е. $N=$ $=\left[\frac{1-8\varepsilon}{10\varepsilon}\right]+1$.

Таким образом, для любого $0<\varepsilon<1/8$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой, что $|r_n(x)|<$ $<\varepsilon$, $\forall x\in[0, 1]$, $\forall n\geqslant N$, т. е. по определению функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{10n-1}$ сходится равномерно на $[0,1]$.

**Признаки равномерной сходимости функциональных рядов. Теорема 9.13** (критерий Коши равномерной сходимости). Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходился равномерно на $D$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал номер $N(\varepsilon)$, такой, что при любых $n>N(\varepsilon)$ и для любого $p>0$ выполнялось неравенство

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in D. \tag{9.42}$$

□ *Необходимость.* Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N=N(\varepsilon)$, такой, что $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon/2$ и $|S_{n+p}(x)-S(x)|<\varepsilon/2$, $\forall x\in D$, $\forall n\geqslant N(\varepsilon)$, $\forall p>0$. Отсюда $|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\leqslant|S_{n+p}(x)-S(x)|+|S_n(x)-$ $-S(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$,

т. е. неравенство (9.42) имеет место.

*Достаточность.* Пусть условие (9.42) выполнено. Тогда для любого $x\in D$ последовательность $(S_n(x))$ является последовательностью Коши, а значит, сходится. Устремляя теперь в неравенстве (9.42) $p$ к бесконечности, получаем $|r_n(x)|\leqslant\varepsilon, \forall x\in D$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно.

Применение критерия Коши на практике бывает зачастую трудоемким. Поэтому пользуются достаточными признаками сходимости функциональных рядов.

**Теорема 9.14** (признак Вейерштрасса). Если члены ряда удовлетворяют неравенствам

$$|u_n(x)| \leqslant a_n,\ n=1,\ 2,\ ...,\ \forall x \in D, \tag{9.43}$$

где $a_n \geqslant 0$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно и абсолютно в $D$.

□ Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то, согласно теореме 9.3, для любого $p \in N$ выполнено неравенство

$$a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p}<\varepsilon,\ \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

Отсюда и из неравенства (9.43) получаем

$$|u_{n+1}(x)+...+u_{n+p}(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|+...+|u_{n+p}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant a_{n+1}+...+a_{n+p}<\varepsilon,\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall p>0,\ \forall x \in D,$$

что в соответствии с критерием Коши и доказывает равномерную (и абсолютную) сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в $D$. ■

При выполнении неравенства (9.43) говорят, что сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является *мажорантой* для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

**Пример 7.** Доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$ на отрезке [2, 4].

□ Для $x \in [2,4]$ имеет место неравенство $\frac{|x-3|^{2n}}{n\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ сходящийся. Тогда по признаку Вейерштрасса заключаем, что исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$ сходится равномерно на [2,4].

Введем следующее определение. Последовательность функций $(f_n(x))$ называется *равномерно ограниченной* на множестве $D$, если существует константа $K>0$, такая, что $|f_n(x)| \leqslant K,\ \forall x \in D,\ n=1, 2, ....$

**Теорема 9.15** (признак Абеля). Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,v_n(x),\quad x \in D,\ n=1,\ 2,\ ..., \tag{9.44}$$

выполнены условия:

1) частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно ограничены на $D$;

2) последовательность $(v_n(x))$ монотонно убывающая и равномерно стремится к нулю, т. е. $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n(x)$.

Тогда ряд (9.44) сходится равномерно в $D$.

□ В силу условия теоремы существует число $K$, такое, что для частичных сумм $\sigma_n(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ выполнено неравенство $|\sigma_n(x)| \leqslant K$, $\forall x \in D$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ Тогда для частичных сумм $S_n(x)$ ряда (9.44) имеем

$$S_n(x) = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n = \sigma_1v_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)v_2 + \ldots + (\sigma_n - \sigma_{n-1})v_n = \sigma_1(v_1 - v_2) + \sigma_2(v_2 - v_3) + \ldots + \sigma_{n-1}(v_{u-1} - v_n) + \sigma_n v_n. \tag{9.45}$$

При $n \to \infty$ имеем $\sigma_n v_n \to 0$, так как $v_n \to 0$ и $|\sigma_n| \leqslant K$.

Покажем теперь, что сумма $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \sigma_k(v_k - v_{k+1})$ имеет предел при $n \to \infty$. Это равносильно доказательству сходимости ряда с общим членом $\sigma_k(v_k - v_{k+1})$. Поскольку $|\sigma_k(v_k - v_{k+1})| \leqslant K(v_k - v_{k+1})$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1} |\sigma_k(v_k - v_{k+1})| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k(v_k - v_{k+1})| \leqslant K[(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \ldots] = Kv_1, \tag{9.46}$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k(v_k - v_{k+1})$, а значит, и ряда (9.44) в силу равенства (9.45).

Из равенства (9.45) и оценки (9.46) следует, что $|S_n| \leqslant Kv_1 + \sigma_n v_n$. Значит, $|S(x)| \leqslant Kv_1(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда (9.44). Та же выкладка, начиная с члена $v_{n+1}$, дает $|r_n(x)| \leqslant Kv_{n+1}(x)$. В силу равномерного стремления $v_n(x)$ к нулю, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что $|r_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in D$, $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$, что и доказывает равномерную сходимость ряда (9.44). ■

**Пример 8.** Исследовать на равномерную сходимость ряды:

$$\text{а)}\ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = \frac{1}{2} + \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots; \tag{9.47}$$

$$\text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots \tag{9.48}$$

□ Исследование равномерной сходимости этих рядов одинаковое. Поэтому рассмотрим ряд (9.47). Пусть

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx.$$

Тогда

$$2 \sin \frac{x}{2} \sigma_n(x) = \frac{1}{2} 2 \sin \frac{x}{2} + 2 \cos x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos 2x \sin \frac{x}{2} + \ldots + 2 \cos nx \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{x}{2}\right) + \left(\sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right) + \ldots + \left(\sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{2n-1}{x}\right) = \sin \frac{2n+1}{2}x.$$

Таким образом,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \tag{9.49}$$

Из равенства (9.49) следует, что функция $\sigma_n(x)$ не определена в точках $x = 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\sigma_n(x)$ на отрезке $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$. Тогда $|\sigma_n(x)| < \frac{1}{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}}$, т.е. частичные суммы $\sigma_n(x)$ ряда $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ ограничены на $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$. Последовательность $v_n(x) = 1/n$ монотонно убывающая, не зависит от $x$ и, значит, равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда по признаку Абеля ряд (9.47) сходится равномерно при $x \in [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует поточечная сходимость ряда (9.47) на $(0, 2\pi)$. Далее, так как при $x = 2m\pi$ получаем расходящийся ряд $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, то ряд (9.47) сходится на всей числовой прямой $\mathbf{R}$, кроме точек $x = 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$.

Для ряда (9.48) аналогично получаем, что

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} \tag{9.50}$$

и что на отрезке $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ справедлива оценка $|\sigma_n(x)| < \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}$, т. е. частичные суммы $\sigma_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ ограничены. Следовательно, ряд (9.48) сходится равномерно на $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$.

**Пример 9.** Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 \sin n\sqrt{x}}{1 + n^3 x^4}, \quad x \in [0, +\infty]. \tag{9.51}$$

□ Пусть $S(x)$ — сумма этого ряда. Так как $S(0) = 0$, а при $x > 0$

$$|u_n(x)| = \left| \frac{x^2 \sin n\sqrt{x}}{1 + n^3 x^4} \right| \leqslant \frac{x^2}{1 + n^3 x^4} < \frac{1}{n^3 x^2} \tag{9.52}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится, то ряд (9.51) сходится для всех $x \in [0, +\infty)$. Докажем, что он сходится равномерно в указанном промежутке.

Для построения мажоранты ряда (9.51) найдем максимум функции $\varphi_n(x) = \frac{x^2}{1 + n^3 x^4}$. Имеем $\varphi_n'(x) = \frac{2x(1 - n^3 x^4)}{(1 + n^3 x^4)^2}$ и $\varphi_n'(x) = 0$ при $x_0 = n^{-3/4}$.

Так как $\varphi_n'(x)\big|_{x<n^{-3/4}} > 0$ и $\varphi_n'(x)\big|_{x>n^{-3/4}} < 0$, то в точке $x_0 = n^{-3/4}$

функция $\varphi_n(x)$ достигает максимума, причем $\max\limits_{x\in[0,\,+\infty)} \varphi_n(x) = \frac{1}{2n^{3/2}}$. Отсюда с учетом неравенства (9.52) получаем оценку

$$\left|\frac{x^2 \sin n\sqrt{x}}{1+n^3x^4}\right| \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса сходится равномерно ряд (9.51) в промежутке $[0, +\infty)$.

**Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.** Свойства равномерно сходящихся рядов аналогичны свойствам равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

**Теорема 9.16** (о непрерывности суммы функционального ряда). Сумма $S(x)$ равномерно сходящегося на множестве $D$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывных функций $u_n(x)$ есть функция, непрерывная на $D$.

□ Равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ к $S(x)$ на $D$ означает, что функциональная последовательность $(S_n(x))$ частичных сумм ряда сходится равномерно к $S(x)$. Так как $S_n(x)$ — функция, непрерывная на $D$ для всех $n\in N$, то на основании теоремы 7.4, ч. II, о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций заключаем, что $S(x)$ также непрерывна на $D$. ■

Из теоремы 9.16 следует, что, если $x_0 \in D$ и в $D$ функции $u_n(x)$ непрерывны, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ сходится равномерно, то

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x). \qquad (9.53)$$

Отсюда видно, что *в равномерно сходящемся ряде возможен почленный переход к пределу.*

**Пример 10.** Найти $\lim\limits_{x\to+0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

□ Так как $0 < \frac{1}{2^n n^x} \leqslant \frac{1}{2^n}$, $\forall x \in [0, +\infty)$, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ сходится равномерно на $[0, +\infty)$. Тогда на основании равенства (9.53) имеем

$$\lim_{x\to+0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+0} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

Условия теоремы 9.16 являются *достаточными* для непрерывности суммы функционального ряда. Существуют неравномерно сходящиеся ряды, сумма которых непрерывна.

**Пример 11.** Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx} - x(n-1)e^{-(n-1)x}]$, $x \in [0, 1]$, имеем $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}[kxe^{-kx} - x(k-1)e^{-(k-1)x}] = nxe^{-nx}$ и $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$. Покажем, что этот ряд сходится на [0,1] неравномерно.

□ Действительно, легко проверить, что $\max\limits_{x\in[0,1]} S_n(x) = 1/e$ и максимум достигается в точке $x = 1/n$. Так как

$$\max_{x\in[0,1]} |r_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} |S(x) - S_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} |S_n(x)| = e^{-1} \neq 0, \ \forall n \in N,$$

то это означает, что неравенство (9.41) не имеет места при $0 < \varepsilon < e^{-1}$, т. е. сходимость рассматриваемого ряда неравномерная на [0,1]. Однако сумма ряда $S(x) = 0$ есть функция, непрерывная на [0,1].

**Теорема 9.17** (о почленном интегрировании функционального ряда). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывных функций сходится к $S(x)$ равномерно на отрезке $[a, b]$. Тогда его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0, x] \subset [a, b]$, и справедлива формула

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt. \tag{9.54}$$

□ По условию последовательность $(S_n(x))$ сходится равномерно к функции $S(x)$. Тогда на основании теоремы 7.5, ч. II, о предельном переходе под знаком интеграла от последовательности равномерно сходящихся функций имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right)dt = \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\left(\lim_{n\to\infty} S_n(t)\right)dt = \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt,$$

что равносильно равенству (9.54). ■

**Теорема 9.18** (о почленном дифференцировании функционального ряда). Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывно дифференцируемых функций $u_n(x)$ сходится к $S(x)$ на $[a, b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на этом отрезке. Тогда исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, его сумма $S(x)$ является непрерывно дифференцируемой функцией, и справедлива формула

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{9.55}$$

Сформулированная теорема является следствием теоремы 7.6 о предельном переходе под знаком производной для равномерно сходящейся последовательности непрерывно дифференцируемых функций.

Теоремы 9.17 и 9.18 являются достаточными условиями почленной интегрируемости и дифференцируемости функциональных рядов.

**Пример 12.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса при любом $x \in \mathbf{R}$, так как при $|x| \in \mathbf{R}$ он мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2}$. Значит, сумма $S(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

Выясним возможность дифференцируемости $S(x)$. Для этого составим ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$. Он мажорируется рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Следовательно, ряд из производных сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$, имеет место равенство $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$, причем $S'(x)$ — непрерывная функция.

**Пример 13.** Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{9.56}$$

□ Рассмотрим ряд

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \tag{9.57}$$

составленный из производных членов ряда (9.57). Так как ряд (9.57) — геометрическая прогрессия, то его сумма $S = \frac{1}{1+x^2}$, если $|x| < 1$. Убедимся, что ряд (9.57) сходится равномерно на отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < 1$. Действительно, его члены удовлетворяют неравенствам $|x^{2n}| \leqslant q^{2n}$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{2n}$, его мажорирующий, сходится при $0 < q < 1$. В таком случае ряд (9.57) можно почленно проинтегрировать. В результате получим

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots)\, dt,$$

т. е.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

причем в этом разложении $|x| < 1$.

**Пример 14.** Можно ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right) \tag{9.58}$$

почленно интегрировать на [0, 1]?

□ Так как $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x^{\frac{1}{2k+1}}-x^{\frac{1}{2k-1}}\right)=x^{\frac{1}{2n+1}}-x$, то

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x\leqslant 1;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

т. е. сумма ряда — функция разрывная. Отсюда следует, что ряд (9.58) на [0, 1] сходится неравномерно, так как в противном случае его сумма $S(x)$ была бы непрерывной. Тем не менее убедимся, что ряд (9.58) можно почленно интегрировать на [0, 1].

Действительно,

$$\int_0^1 S(x)\,dx=\int_0^1(1-x)\,dx=1/2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n+1}}-\frac{1}{1+\frac{1}{2n-1}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2},$$

так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ (пример 3 § 9.1). Отсюда видно, что хотя ряд (9.58) и не сходится равномерно, однако его можно почленно интегрировать на [0,1].

**Пример 15.** Найти сумму ряда $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n(n-1)}$.

□ Данный ряд сходится равномерно для $x\in\mathbf{R}$, так как он мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$. Ряд из производных имеет вид $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^{n-1}x}{n-1}\cos x$. Он сходится равномерно, как и ряд (9.48), на отрезке $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Тогда справедливы равенства

$$S'(x)=\cos x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^{n-1}x}{n-1},\quad x\in[\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon],\ S'(\pi)=0.$$

Отсюда

$$\frac{S'(x)}{\cos x}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin^{n-1}x}{n-1},\quad x\neq\pm\frac{\pi}{2}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\left(\frac{S'(x)}{\cos x}\right)'=\cos x\sum_{n=2}^{\infty}\sin^{n-2}x=\frac{\cos x}{1-\sin x},$$

если $|\sin x| < 1$, т. е. если $|x| < \pi/2 - \varepsilon$. (Равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{n-2} x$ для $|x| < \pi/2 - \varepsilon$ доказывается, как и равномерная сходимость ряда (9.56).) Интегрируя последнее равенство, получаем

$$\frac{S'(x)}{\cos x} = \int_0^x \frac{\cos t\,dt}{1-\sin t} + C_1 = -\ln(1-\sin t)\Big|_0^x + C_1 = C_1 - \ln(1-\sin x).$$

Так как $S'(\pi)=0$, то $C_1=0$. Итак, $S'(x) = -\cos x \ln(1-\sin x)$. Еще раз интегрируя, находим

$$S(x) = -\int_0^x \cos t \ln(1-\sin t)\,dt + C_2 = \int_0^x \ln(1-\sin t)\,d(1-\sin t) + C_2 =$$

$$= [(1-\sin t)\ln(1-\sin t) - (1-\sin t)]\Big|_0^x + C_2 = (1-\sin x)\ln(1-$$

$$-\sin x) - (1-\sin x) + 1 + C_2.$$

Так как $S(0)=0$, то $C_2=0$. Таким образом, окончательно имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n(n-2)} = (1-\sin x)\ln(1-\sin x) + \sin x,\ |x| < \pi/2 - \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$

**Задачи и упражнения**

1. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{3^{nx}+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) e^{n/\ln x}$.

2. Исходя из определения, доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n^3-6}}$ на отрезке $[0,1]$.

3. Доказать равномерную сходимость ряда на указанном отрезке:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n\,(x+2)^n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}$, $x \in [-3, -1]$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$, $x \in [-2, 0]$.

4. Показать, что функция $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}$ всюду непрерывна.

5. Может ли функциональный ряд на отрезке: а) сходиться равномерно и не сходиться абсолютно; б) сходиться абсолютно и не сходиться равномерно? Рассмотреть примеры: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$.

6. Найти сумму ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$.

**Степенные ряды. Теорема Абеля.** Ряд вида

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{9.59}$$

или вида

$$c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + \ldots + c_n (x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \tag{9.60}$$

членами которого являются степенные функции, называется *степенным*. Действительные числа $c_n$ называются *коэффициентами степенного ряда*. Степенной ряд (9.59) всегда сходится по крайней мере в точке $x=0$, а ряд (9.60) — в точке $x=x_0$. Ряд (9.59) называется *рядом по степеням* $x$, а ряд (9.60) — *по степеням* $(x-x_0)$. Так как заменой $x-x_0=X$ ряд (9.60) сводится к виду (9.59), то в дальнейшем будем рассматривать степенные ряды (9.59).

Для степенных рядов имеет место

**Теорема 9.19** (Абеля). Пусть степенной ряд (9.59) сходится в точке $x_0 \neq 0$. Тогда он сходится абсолютно в любой точке $x$, удовлетворяющей неравенству $|x| < |x_0|$, и сходится равномерно в области $|x| \leqslant q < |x_0|$. Если же ряд расходится в некоторой точке $x_1$, то он расходится и во всех точках $x$, таких, что $|x| > |x_1|$.

□ По условию числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c\, x_0^n = 0$. Отсюда следует, что последовательность $(c_n x_0^n)$ ограничена, т. е. существует число $M > 0$, такое, что

$$|c_n x_0^n| \leqslant M, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{9.61}$$

Запишем ряд (9.59) в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$. Отсюда с учетом неравенства (9.61) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n. \tag{9.62}$$

Если $|x| < |x_0|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Тогда из неравенства (9.62) следует, что исходный ряд (9.59) мажорируется рядом $M \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$, а значит, сходится абсолютно, если $|x| < |x_0|$. Если же $|x| \leqslant q < |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| \leqslant \frac{q}{|x_0|} < 1$. Следовательно, степенной ряд (9.59) в этом случае мажорируется сходящимся числовым рядом $M \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q}{|x_0|}\right)^n$,

а значит, по признаку Вейерштрасса ряд (9.59) сходится равномерно в области $|x| \leqslant q < |x_0|$.

Пусть теперь ряд (9.59) расходится в точке $x_1$. Предположим, что в некоторой точке $x_2$, такой, что $|x_2| > |x_1|$, ряд сходится. Тогда по только что доказанному он должен сходиться и в точке $x_1$, что противоречит условию. Значит, для всех $x$, таких, что $|x| > |x_1|$, ряд (9.59) расходится. ■

**Область сходимости степенного ряда.** Теорема Абеля утверждает, что если степенной ряд (9.59) сходится в точке $x_0$, то он сходится абсолютно в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$ с центром в точке 0. Если

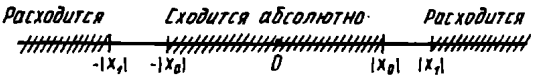



Рис. 9.2

же ряд расходится в точке $x_1$, то он расходится в области $(-\infty, -|x_1|) \cup (|x_1|, +\infty)$ (рис. 9.2). Отсюда можно сделать заключение: областью сходимости степенного ряда (9.59) всегда является интервал, конечный или бесконечный, с центром в точке 0 или единственная точка 0.

Неотрицательное число $R$, такое, что степенной ряд (9.59) сходится в интервале $(-R, R)$ и расходится при $|x| > R$, называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ — *интервалом сходимости* ряда. Если ряд (9.59) сходится в единственной точке $x_0 = 0$, то для него $R = 0$. Если же он сходится на всей числовой оси, то $R = \infty$.

Как найти радиус сходимости степенного ряда? Для этой цели используется признак Д'Аламбера или признак Коши.

Рассмотрим для каждого фиксированного $x$ числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Предположим, что существует конечный предел

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \left( \text{или } L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |x| L.$$

Отсюда по признаку Д'Аламбера ряд (9.59) сходится при $|x|L < 1$ и расходится при $|x|L > 1$.

Следовательно, если выполнено соотношение

$$|x| < \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |c_{n+1}/c_n|} = \lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|,$$

то ряд (9.59) сходится, а если $|x| > 1/L$, то ряд при этих $x$ расходится.

Таким образом, для радиуса сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x$ получаем формулу

$$R = 1/L = \lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|. \tag{9.63}$$

Если к ряду (9.59) применить признак Коши, то аналогичные рассуждения приводят к формуле (Коши — Адамара*)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{9.64}$$

Заметим, что если $L=0$, то полагают, что $R=\infty$, т. е. степенной ряд сходится на всей числовой оси. Если же $L=\infty$, то $R=0$ и, значит, ряд (9.59) сходится в единственной точке $x=0$.

Рассмотрим примеры на определение области сходимости степенного ряда.

**Пример 1.** Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ по формуле (9.63) имеем $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$, т. е. данный ряд сходится в интервале $(-1, 1)$ и расходится при $|x| > 1$. В граничных точках $x = -1$ и $x = 1$ интервала сходимости нужны дополнительные исследования. При $x = 1$ получаем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, а при $x = -1$ — абсолютно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Итак, область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{n} \frac{x^n}{n^2}$ есть отрезок $[-1, 1]$.

**Пример 2.** Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3n+1)\,2^n}$.

□ По формуле (9.64) имеем $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(3n+1)\,2^n} = 2$, т. е. ряд сходится в интервале $(-2, 2)$ и расходится при $|x| > 2$. В граничных точках $x = -2$ и $x = 2$ интервала сходимости получаем условно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ и расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ соответственно.

Итак, область сходимости данного ряда есть промежуток $[-2,2)$.

* Ж. Адамар (1865—1963) — французский математик.

Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ формулы (9.63) и (9.64) сохраняются. Интервалом же сходимости ряда является промежуток $(x_0-R,\ x_0+R)$ с центром в точке $x_0$.

**Пример 3.** Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

□ По формуле (9.63) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\sin\dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^2+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^2+1}}=1,$$

так что интервал сходимости есть $-1<x-2<1$ или $1<x<3$. Ряд расходится при $x<1$ и $x>3$. В точках $x=1$ и $x=3$ получаем сходящиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ соответственно. Таким образом, область исходного ряда есть отрезок $[1,3]$.

*Замечание.* Формула (9.63) получена в предположении существования конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty}|c_{n+1}/c_n|$, т. е. в предположении, что ряд (9.59) содержит все степени $x$. Если степени $x$ входят в ряд с пропусками, то непосредственное применение формулы (9.63) невозможно. Например, для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}$ коэффициенты $c_{2n}=0$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{2n+1}/c_{2n})=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{2n+2}/c_{2n+1})=0$, т. е. формулу (9.63) применить нельзя. В таких случаях нахождения области сходимости ряда применяем непосредственно признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x)^{2n+3}(2n+1)}{(2n+3)(2x)^{2n+1}}\right|=4|x|^2<1,$$

т. е. данный ряд сходится при $|x|<1/2$.

**Пример 4.** Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{n!}$.

□ Здесь степени $x$ входят с пропусками, поэтому применять формулу (9.63) нельзя. По признаку Д'Аламбера ряд сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+1}}{n+1}<1.$$

Это неравенство возможно при $|x|\leqslant 1$, т. е. ряд сходится абсолютно при $|x|\leqslant 1$.

**Непрерывность суммы, интегрирование и дифференцирование степенных рядов.** Согласно теореме Абеля, степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-q,\ q]\subset(-R,\ R)$, где $R$ — радиус сходимости ряда. В таком случае по теореме 9.16 его сумма является непрерывной функцией на этом отрезке.

Следующее свойство степенного ряда сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 9.20.** Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ можно почленно интегрировать на любом отрезке, целиком принадлежащем интервалу сходимости ряда. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз. Ряды, полученные почленным интегрированием или дифференцированием степенного ряда, имеют тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

□ Ограничимся случаем, когда существует $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}| = R$. В силу равномерной сходимости степенного ряда $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ на отрезке $[-q, q] \subset (-R, R)$ по теореме 9.17 его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0, x] \subset (-R, R)$, причем

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x_0^{n+1}}{n+1}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1}$ сходится в области $(-R, R)$, поскольку его радиус сходимости

$$R' = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{c_{n+2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = R.$$

Ряд же $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x_0^{n+1}}{n+1} = x_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x_0^n}{n+1}$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x_0^n|$. Отсюда следует, что ряд, полученный почленным интегрированием исходного степенного ряда $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, сходится равномерно в $[-q, q] \in (-R, R)$.

Почленное дифференцирование исходного ряда приводит к ряду $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$.

Покажем, что он сходится при $|x| < R$. Действительно, поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится абсолютно при $|x| \leqslant q < R$, то сходится и числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n q^n$. Тогда по необходимому признаку сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} c_n q^n = 0$, т. е. последовательность $(c_n q^n)$ ограничена. Это значит, что существует константа $K > 0$, такая, что $|c_n q^n| \leqslant K$, $\forall n \geqslant 0$. Отсюда

$$|n c_n x^{n-1}| = n/q\,|c_n q^n| \cdot |x^{n-1}/q^{n-1}| < Kn/q\,(|x|/q)^{n-1}.$$

Следовательно, ряд производных равномерно сходится на всяком отрезке $[-q, q]$, содержащемся в интервале $(-R, R)$, и почленное

дифференцирование оправдано. Ясно, что этот процесс может быть повторен. Радиус сходимости ряда $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ равен

$$R'' = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R,$$

поскольку последний предел, по предположению, существует.

Итак, функция $S(x)$, представленная степенным рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ в $(-R, R)$, имеет производные всех порядков, т. е.

$$S^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n x^{n-k},\ k \geqslant 2,$$

причем этот ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-q, q] \subset$ $\subset (-R, R)$. ■

Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда иногда позволяет найти сумму этого ряда.

**Пример 5.** Найти сумму ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2 + \frac{1}{n}\right)x^n$.

□ Легко убедиться, что радиус сходимости ряда $R = 1$. Представим этот ряд в виде

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n = S_1(x) + S_2(x),$$

где $S_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, $S_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n/n$. Далее $S_1(x) = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x\overline{S}_1(x)$, где $\overline{S}_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

При $|x| < 1$ имеем

$$\int_0^x \overline{S}_1(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^{n-1}\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^x t^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} =$$

$= x\overline{\overline{S}}_1(x)$, где $\overline{\overline{S}}_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$; $\int\limits_0^x \overline{\overline{S}}_1(t)\,dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\int\limits_0^x t^{n-1}dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$.

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \overline{\overline{S}}_1(t)\,dt = \overline{\overline{S}}_1(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Далее

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \overline{S}_1(t)\,dt = \overline{S}_1(x) = [x\overline{\overline{S}}_1(x)]' = \left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Таким образом, $S_1(x) = x\overline{S}_1(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. Наконец,

$$S_2'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

Отсюда находим

$$\int_0^x S_2'(t)\,dt=S_2(x)-S_2(0)=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x),$$

так как $S_2(0)=0$.

Таким образом, окончательно

$$S(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}-\ln(1-x),\ |x|<1.$$

**Степенные ряды в комплексной области.** Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{9.65}$$

где $z=x+iy$, $z_0=x_0+iy_0$, а $c_n=a_n+ib_n$, $a_n$, $b_n\in\mathbf{R}$, называется *рядом с комплексными членами* или рядом по степеням $z-z_0$.

Для рядов (9.65) справедлива

**Теорема Абеля.** Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходится при некотором $z=z_1$, то он сходится абсолютно при всех значениях $z$, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, и сходится равномерно в области $|z-z_0|\leqslant q<|z_1-z_0|$. Если же этот ряд расходится в некоторой точке $z_2$, то он расходится во всех точках $z$, таких, что $|z-z_0|>|z_2-z_0|$.

Доказательство этой теоремы повторяет дословно доказательство теоремы Абеля 9.19.

Согласно теореме Абеля, для ряда (9.65) этот ряд сходится в круге $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ радиуса $|z_1-z_0|$ с центром в точке $z_0$, т. е. областью сходимости степенного ряда (9.65) является круг с центром в точке $z_0=x_0+iy_0$. Неотрицательное число $R$, такое, что ряд (9.65) сходится в круге $|z-z_0|<R$ и расходится при $|z-z_0|>R$, называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а круг $|z-z_0|<R$ — *кругом сходимости* этого ряда (рис. 9.3).

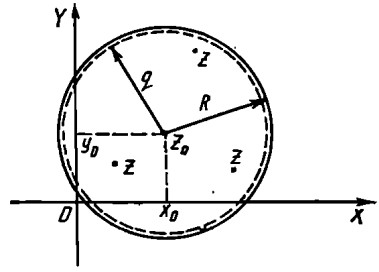


Рис. 9.3

Радиус сходимости ряда (9.65) определяется по формуле (9.63) или (9.64), где $|c_n|=|a_n+ib_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ (если пределы существуют).

**Пример 6.** Найти круг сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}. \tag{9.66}$$

□ Здесь $c_n = \dfrac{1}{n^2(1+i)^n}$. По формуле (9.63) находим

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2(1+i)^{n+1}}{n^2(1+i)^n}\right| = |1+i| = \sqrt{2},$$

т. е. ряд (9.66) сходится в круге $|z-i|<\sqrt{2}$. На границе этого круга, т. е. в точках окружности $|z-i|=\sqrt{2}$, ряд исследуем на абсолютную сходимость. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z-i|^n}{n^2(\sqrt{2})^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то ряд (9.66) в точках окружности $|z-i|=\sqrt{2}$ сходится абсолютно.

Таким образом, ряд (9.66) сходится абсолютно в области $|z-i|\leqslant 2$.

**Пример 7.** Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(z-1+i)^n}$.

□ Данный ряд не является степенным в смысле определения (9.65). Исследуем его сходимость, применив признак Коши. Обозначим $u_n(z)=n/(z-1+i)^n$ и найдем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{|z-(1-i)|^n}} = \frac{1}{|z-(1-i)|}.$$

Отсюда ряд сходится, если $1/|z-(1-i)|<1$, т. е. если $|z-(1-i)|>1$.

Таким образом, область сходимости данного ряда — внешность круга радиуса 1 с центром в точке $1-i$.

Дальнейшие свойства комплексных функциональных рядов будут выяснены в теории функций комплексного переменного, гл. 15, ч. IV.

**Задачи и упражнения**

1. Найти область сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^2(x+2)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n^2}x^{n^2}$.

2. Найти сумму ряда:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n(n-1)}x^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2+n-1)x^n$.

3. Показать, что для суммы ряда $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ выполняется соотношение $S''(x)=S(x)$.

4. Найти область сходимости ряда:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(z-i)^n;\quad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1-i)^n}{3^n(n+i)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+2)}{(z+1-i)^n}.$$

5. Показать, что если ряд (9.65) абсолютно сходится в одной из точек на окружности круга сходимости, то он абсолютно сходится во всех точках этой окружности.

### 9.4. РЯДЫ ТЕЙЛОРА

**Определение ряда Тейлора.** Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0$ имеет производные всех порядков. Степенной ряд

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ \dots\ +$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ \dots\ =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (9.67)$$

называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* $x_0$. Если $x_0=0$, то ряд

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ \dots$$

называется *рядом Маклорена*. Эти ряды широко используются для получения приближения функции $f$ в окрестности точки $x_0$. Заметим, что ряд (9.67), составленный для функции $f(x)$, может расходиться или сходиться, но не к $f(x)$. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

в точке $x_0=0$ имеет производные всех порядков, равные нулю. Поэтому ее ряд Тейлора имеет вид $0+0x+0x^2+\dots$, который сходится, но не к $f(x)$, не равной нулю ни в какой точке $x\neq 0$.

Представляет интерес тот случай, когда ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0$.

**Условия представления функции рядом Тейлора.** Из ряда Тейлора (9.67) следует, что его $n$-й частичной суммой является многочлен Тейлора

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ \dots\ +$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Отсюда, если ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, справедливо равенство

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x), \qquad (9.68)$$

где $r_n(x)$ — остаток ряда. На основании теоремы 9.1 получаем, что для сходимости ряда Тейлора (9.67) к функции $f(x)$ необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0, \tag{9.69}$$

где $x$ принадлежит некоторой окрестности точки $x_0$.

Разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{9.70}$$

где остаточный член $R_n(x)$ представим одним из следующих видов:

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ — форма Лагранжа ($\xi\in(x_0,\ x)$);

$R_n(x)=o(|x-x_0|^n)$ — форма Пеано;

$R_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ — интегральная форма.

Заметим, что ряд Тейлора можно составить для любой функции $f(x)$, имеющей в точке $x_0$ производные всех порядков. Рассмотренный выше пример показывает, что этот ряд не всегда имеет своей суммой $f(x)$ (иногда он может оказаться расходящимся для всех $x\neq x_0$).

Из формулы (9.70) и равенств (9.68) и (9.69) вытекает, что остаток ряда Тейлора $r_n(x)$ равен остаточному члену формулы Тейлора $R_n(x)$ при условии (9.69).

Итак, если ряд Тейлора функции $f(x)$, для которой он составлен, сходится в окрестности точки $x_0$ к этой функции, то имеет место равенство

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ \dots\ +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ \dots \tag{9.71}$$

Для практических приложений удобен следующий достаточный признак разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

**Теорема 9.21.** Если производные любого порядка $k$, $k=0,\ 1,\ \dots$, функции $f$ ограничены в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0$ одной и той же константой $K$, то ряд Тейлора (9.71) функции $f$ сходится к $f(x)$ для любого $x$ из этой окрестности.

□ По условию $|f^{(k)}(x)|\leqslant K$, $\forall\, x\in U(x_0)$, $k=0,1,\ \dots$ Тогда для остаточного члена $r_n(x)$ формулы Тейлора в форме Лагранжа имеем

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0^{n+1})\right|\leqslant K\,\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{9.72}$$

Согласно примеру 5 § 2.2, ч. I ($a=x-x_0$), при фиксированных $x$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}=0, \tag{9.73}$$

а это и означает, что ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к $f(x)$, $\forall\, x\in U(x_0)$. ■

Возникает вопрос: единственно ли разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0$?

**Теорема 9.22.** Если функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора, то это разложение единственно.

□ Пусть $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ и $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ — два различных разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в интервале сходимости $U(x_0)=(x_0-R,\ x_0+R)$, где $R$ — радиус сходимости рядов. Тогда разность этих рядов представляет собой функцию, тождественно равную нулю для всех $x\in U(x_0)$, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)(x-x_0)^n\equiv 0,\quad \forall x\in U(x_0). \tag{9.74}$$

Отсюда при $x=x_0$ получаем $a_0-b_0=0$, т. е. $a_0=b_0$. Дифференцируя равенство (9.74) внутри интервала сходимости $U(x_0)$, получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-b_n)(x-x_0)^{n-1}\equiv 0$. Отсюда при $x=x_0$ найдем, что $a_1=b_1$. Продолжая этот процесс, получим $a_n=b_n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, т. е. разложение $f(x)$ в ряд Тейлора единственно. ■

**Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.** Получим разложения в ряд Тейлора (Маклорена) некоторых элементарных функций.

1) $f(x)=e^x$. По формуле Тейлора (3.54)

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ \ldots\ +\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

где остаточный член $R_n(x)=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\xi\in(0,x)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ для любого $x$, то ряд

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ \ldots\ +\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\ \ldots \tag{9.75}$$

сходится при любом $x\in(-\infty,\ +\infty)$.

Положив в формуле (9.75) $x=1$, придем к числовому ряду (9.11) для $e$.

Если в ряде (9.75) заменить $x$ на $-x$, то получим ряд

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\ \ldots\ +(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ \ldots, \tag{9.76}$$

также сходящийся в $(-\infty,\ +\infty)$. Отсюда и из ряда (9.75) находим ряды для функций $\operatorname{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$:

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ \ldots\ +\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ \ldots; \tag{9.77}$$

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ \ldots\ +\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ \ldots \tag{9.78}$$

Областью сходимости этих рядов также является интервал $(-\infty,\ +\infty)$.

2) $f(x)=\sin x$. Так как $|f^{(n)}(x)|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1$, $\forall x\in R$, то, согласно теореме 9.21, функцию $\sin x$ можно разложить в ряд Тейлора на всей действительной оси. Используя формулу Тейлора (3.55), ч. I, для $\sin x$, получим ряд Тейлора

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ \ldots\ +(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ \ldots, \tag{9.79}$$

сходящийся на всей числовой оси.

3) $f(x)=\cos x$. Рассуждая аналогично и используя формулу Тейлора (3.56), ч. I, для $\cos x$, получаем ряд Тейлора

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ \ldots\ +(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ \ldots, \tag{9.80}$$

сходящийся на всей действительной оси.

4) $f(x)=(1+x)^\alpha$. Используя формулу Тейлора (3.58), ч. I, для функции $(1+x)^\alpha$, имеем

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ \ldots\ +$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\ \xi\in(0,\ x).$$

Составим ряд

$$f(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ \ldots\ +\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ \ldots \tag{9.81}$$

и найдем его интервал сходимости. По признаку Д'Аламбера имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)\,n!x^{n+1}}{(n+1)!\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,x^n}\right|=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\cdot|x|=|x|.$$

Отсюда ряд (9.81) сходится абсолютно при $|x|<1$. Покажем, что суммой этого ряда является $(1+x)^\alpha$.

В самом деле, нетрудно проверить, что функция $f(x)$, определенная рядом (9.81), является решением задачи Коши: $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$, $f(0)=1$. Но решением этой же задачи является функция $(1+x)^\alpha$. Отсюда в силу единственности решения задачи Коши получаем $f(x)=(1+x)^\alpha$, $|x|<1$, т. е. *биномиальный ряд*

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ \ldots\ +\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ \ldots \tag{9.82}$$

сходится абсолютно в интервале $(-1,\ 1)$ к $f(x)=(1+x)^\alpha$.

Заметим, что если $\alpha$ — целое положительное число или нуль, то ряд (9.82) превращается в бином Ньютона (3.29), ч. I.

5) $f(x)=\ln(1+x)$. Положив в формуле (9.82) $\alpha=-1$, получим ряд

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots,$$

сходящийся равномерно в $(-1, 1)$. Интегрируя его почленно в пределах от нуля до $x$, $|x|<1$, имеем ряд

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots, \quad (9.83)$$

сходящийся в $(-1, 1)$. Кроме того, данный ряд сходится при $x=1$, как ряд Лейбница, к числу

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\ldots$$

Основные разложения 1—5 применяются для разложения в ряд Тейлора функций. Приведем примеры.

**Пример 1.** Заменив в формуле (9.75) $x$ на $-x^2$, получим ряд

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots, \quad (9.84)$$

сходящийся на всей числовой оси.

**Пример 2.** По формуле (9.82) при $x=-t^2$ и $\alpha=-1/2$ получим ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=(1-t^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+\ldots,$$

сходящийся при $|t|<1$. Интегрируя его почленно в пределах от 0 до $x$, $|x|<1$, получаем ряд

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

сходящийся при $|x|<1$.

**Пример 3.** Разложить в ряд Тейлора функцию

$$f(x)=\ln\frac{|x^2-2|}{1+x^2}=\ln|2-x^2|-\ln(1+x^2).$$

□ При $|x|<1$ с учетом формулы (9.83) получаем ряд $\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}$. Тогда при $|x|<1$ имеем $\ln|2-x^2|=\ln(2-x^2)=\ln 2+\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot n}(-x^2)^n=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$.

Итак, окончательно

$$\ln\frac{|x^2-2|}{1+x^2}=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}=$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(-1)^{n-1}-\frac{1}{2^n}\right]x^{2n},\ |x|<1.$$

**Ряды Тейлора в приближенных вычислениях функций и интегралов.** Степенные ряды применяются для приближенного вычисления определенных интегралов или значений функций в некоторых точках.

**Пример 4.** Вычислить $\sqrt[5]{34}$ с точностью до $10^{-4}$.

□ Имеем $\sqrt[5]{34}=\sqrt[5]{32+2}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/5}$. Воспользуемся теперь биномиальным рядом (9.82) при $x=1/16$, $\alpha=1/5$, сохранив те члены разложения, которые имеют значащие цифры до пятого знака после запятой:

$$\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/5}=1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}-\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{16^2}+\frac{6}{125}\cdot\frac{1}{16^3}+\ldots$$

Получили знакочередующийся ряд, остаток которого не превышает первого отброшенного члена. Так как $\frac{6}{125}\cdot\frac{1}{16^3}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3200}\ll 10^{-3}$ (знак $\ll$ означает «много меньше», «значительно меньше»), то с указанной точностью $\left(1+\frac{1}{16}\right)^{1/5}\approx 1+1/80-\frac{1}{3200}=1{,}0122$, так что $\sqrt[5]{34}\approx 2{,}0244$.

**Пример 5.** Вычислить $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx$ с точностью до $10^{-3}$.

□ Согласно формуле (9.84), имеем

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx=\int_0^{1/2}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots\right)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+$$
$$+\frac{1}{5\cdot 2^{12^5}}-\frac{1}{7\cdot 3!2^7}+\frac{1}{9\cdot 4!2^9}-\ldots$$

Так как $1/(7\cdot 3!2^7)<0{,}001$, то для приближенного вычисления интеграла достаточно взять первые три члена разложения, т. е.

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}=0{,}462.$$

**Применение рядов к решению дифференциальных уравнений.** Для примера рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x)$. Если его решение не удается найти в элементарных функциях, то иногда его можно отыскать в виде некоторого степенного ряда. Рассмотрим один из методов решения — *метод неопределенных коэффициентов.* Он применяется тогда, когда требуется найти либо частное решение $y=\varphi(x)$ уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$, либо общее решение этого уравнения в виде ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$

Если уравнение $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x)$ в окрестности точки $x_0$ удовлетворяет условиям теоремы 8.4 о существовании и единственности решения, то его частное (или общее) решение можно

искать в виде ряда $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, в котором коэффициенты $c_n$ подлежат определению. Если точка $x_0$ является особой для уравнения $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x)$, т. е. в ней хотя бы одна из функций $p_1$, $p_2$ или $f$ не определена, то его частное (или общее) решение следует искать в виде обобщенного степенного ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+\rho},$$

где $\rho$ подлежит определению вместе с коэффициентами ряда.

Для определения коэффициентов $c_n$ ряда $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ или обобщенного ряда $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+\rho}$ на практике поступают следующим образом:

1) дважды дифференцируют ряд с неизвестными коэффициентами и находят, таким образом, $y'$ и $y''$;

2) подставляют разложения $y$, $y'$ и $y''$ в виде степенных рядов в исходное дифференциальное уравнение;

3) функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $f(x)$ представляют в виде рядов по степеням $x-x_0$, после чего дифференциальное уравнение $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x)$ превращается в равенство двух степенных рядов;

4) приравнивая коэффициенты в полученных рядах при одинаковых степенях $x-x_0$, получают уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов $c_n$; если же решение уравнения ищется в виде обобщенного степенного ряда, то, приравнивая коэффициенты при наименьшей степени $x-x_0$, получают так называемое *определяющее уравнение,* из которого находятся всевозможные значения параметра $\rho$;

5) найденные неизвестные коэффициенты $c_n$ подставляют в искомый ряд $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$; в случае обобщенного степенного ряда коэффициенты $c_n$ находят для каждого значения $\rho$ и тем самым получают столько частных решений, сколько значений имеет параметр $\rho$.

Полученное решение в виде ряда исследуется на сходимость известными признаками, причем сумма ряда является решением дифференциального уравнения в области сходимости этого ряда.

**Пример 6.** Применяя метод неопределенных коэффициентов, найти общее решение уравнения $y''=y$.

□ Данное уравнение не имеет особых точек, поэтому его общее решение ищем в виде ряда $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Отсюда $y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, $y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$. Подставляя ряды для $y$ и $y''$ в исходное уравнение, получаем равенство

$$(y''=y)\Leftrightarrow\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right).$$

Отсюда приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях получаем бесконечную систему равенств

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2\cdot 1\,C_2 = C_0; \\ x^1 & 3\cdot 2\,C_3 = C_1; \\ x^2 & 4\cdot 3\,C_4 = C_2; \\ x^3 & 5\cdot 4\,C_5 = C_3; \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n & (n+2)(n+1)\,c_{n+2} = c_n; \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Из этой системы для коэффициентов с четными и нечетными индексами последовательно имеем:

$$c_0 = c_0; \qquad c_1 = c_1;$$

$$c_2 = \frac{c_0}{2\cdot 1} = \frac{c_0}{2!}; \qquad c_3 = \frac{c_1}{2\cdot 3} = \frac{c_1}{3!};$$

$$c_4 = \frac{c_2}{4\cdot 3} = \frac{c_0}{4!}; \qquad c_5 = \frac{c_3}{4\cdot 5} = \frac{c_1}{5!};$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$c_{2n} = \frac{c_0}{(2n)!}. \qquad c_{2n+1} = \frac{c_1}{(2n+1)!}.$$

Тогда искомое решение запишется в виде

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} =$$

$$= c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = c_0 \operatorname{ch} x + c_1 \operatorname{sh} x,$$

согласно равенствам (9.77) и (9.78). В полученном общем решении $c_0$ и $c_1$ — произвольные постоянные. Так как ряды (9.77) и (9.78) сходятся при любых $x \in \mathbf{R}$, то найденная функция является общим решением исходного дифференциального уравнения для всех $x \in \mathbf{R}$.

Описанный способ решения дифференциальных уравнений распространяется на уравнения любого порядка. Чаще всего этот способ применяется для решения линейных дифференциальных уравнений. Его применение основано на следующих теоремах (доказываемых в аналитической теории дифференциальных уравнений), сформулированных для уравнений второго порядка.

**Теорема 9.23.** Пусть в уравнении $y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x)$ функции $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $f(x)$ разлагаются в степенные ряды в окрестности точки $x_0$. Тогда решение уравнения существует и представимо в виде степенного ряда $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

**Теорема 9.24.** Пусть в уравнении $p_0(x)\,y'' + p_1(x)\,y^1 + p_2(x)\,y = 0$ функции $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ разлагаются в степенные ряды в окрестности точки $x_0$, причем точка $x_0$ является нулем порядка $s$ функции $p_0(x)$, нулем порядка не ниже $s-1$ функции $p_1(x)$ и нулем порядка не ниже $s-2$ функции $p_2(x)$. Тогда решение уравнения существует и представимо в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^{k+\rho}=(x-x_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,$$

где $a_0\neq 0$ и $\rho$ — некоторое действительное число.

**Задачи и упражнения**

1. Разложить в степенной ряд функции и указать область сходимости:

а) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; в) $\sin^2 x$.

2. Вычислить приближенно с точностью $\varepsilon$:

а) $\sqrt{2}$, $\varepsilon=10^{-4}$; б) $e^{-1/4}$; $\varepsilon=10^{-4}$;

в) $\displaystyle\int_0^{0,5}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$; г) $\displaystyle\int_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^4}$, $\varepsilon=10^{-3}$.

## 9.5. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ *

**Уравнение и функции Бесселя.** Степенные ряды находят широкое применение при решении дифференциальных уравнений. В качестве примера найдем решение *уравнения Бесселя*

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0, \tag{9.85}$$

к которому приводят многие задачи математической физики. Уравнение (9.85) удовлетворяет условиям теоремы 9.24, в соответствии с которой его решение будем искать в виде обобщенного степенного ряда ($x_0=0$)

$$y(x)=x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\rho},\quad a_0\neq 0, \tag{9.86}$$

где $\rho$ — некоторое действительное число.

Проделаем все выкладки формально, а затем проверим, что полученные ряды сходятся и удовлетворяют уравнению.

Дифференцируя ряд (9.86) почленно, получаем

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)x^{k+\rho-1},\quad y''=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-2}.$$

Подставив $y(x)$, $y'(x)$ и $y''(x)$ в уравнение (9.85), найдем

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+\rho)x^{k+\rho}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\rho+2}-$$
$$-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+\rho}=0$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k[(\rho+k)^2+x^2-\nu^2]x^{k+\rho}=0.$$

* Ф. Бессель (1784—1846) — немецкий математик и астроном.

Сравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем бесконечную систему

$$\begin{array}{l|ll} x^{\rho} & a_0(\rho^2-\nu^2) & =0; \\ x^{\rho+1} & a_1[(\rho+1)^2-\nu^2] & =0; \\ x^{\rho+2} & a_2[(\rho+2)^2-\nu^2]+a_0 & =0; \\ x^{\rho+3} & a_3[(\rho+3)^2-\nu^2]+a_1 & =0; \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ x^{\rho+n} & a_n[(\rho+n)^2-\nu^2]+a_{n-2} & =0; \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array} \tag{9.87}$$

Считая коэффициент $a_0 \neq 0$, из равенства $a_0(\rho^2-\nu^2)=0$ имеем $\rho=\pm\nu$. Пусть $\rho=\nu\geqslant 0$. Тогда коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, а для коэффициентов с четными индексами будем иметь

$$a_2=-\frac{a_0}{(2+\nu)^2-\nu^2}=-\frac{a_0}{4+4\nu}=-\frac{a_0}{2\cdot 2(1+\nu)}=-\frac{a_0}{1\cdot 2^2(\nu+1)};$$

$$a_4=-\frac{a_2}{(4+\nu)^2-\nu^2}=-\frac{a_2}{2\cdot 4(2+\nu)}=$$

$$=(-1)^2\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 2^2(1+\nu)(2+\nu)}=\frac{a_0}{2!\,2^4(\nu+1)(\nu+2)};$$

$$a_6=-\frac{a_4}{(6+\nu^2)-\nu^2}=(-1)^3\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}=$$

$$=-\frac{a_0}{3!\,2^6(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)};$$

. . . . . .

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2\cdot 4\cdots(2k)\,2^k(1+\nu)(2+\nu)\cdots(k+\nu)}=$$

$$=\frac{(-1)^k a_0}{k!\,2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)};$$

. . . . . .

Подставив эти коэффициенты в ряд (9.86), получим решение уравнения Бесселя в виде

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}x^{2k+\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0}{k!\,2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}x^{2k+\nu}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a_0 x^{\nu}}{k!\,(1+\nu)(2+\nu)\cdots(k+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Выберем произвольное число $a_0\neq 0$ в виде $a_0=1/(2^{\nu}\cdot\nu!)=$ $=1/(2^{\nu}\Gamma(1+\nu))$, $\nu<-1$, где $\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$ — гамма-функция (интеграл Эйлера первого рода). Тогда решение уравнения Бесселя (9.85) представится в виде

$$y(x) = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)}{k!\nu!\,(1+\nu)\,(2+\nu)\cdots(k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (9.88)$$

При $\rho = -\nu$, выбирая $a_0 = 1/(2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1))$, аналогично получим

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \quad (9.89)$$

При $\nu > 0$ нецелом ряды (9.88) и (9.89) сходятся при всех $x$ (по признаку Д'Аламбера). Далее, так как $J_\nu(x) \longrightarrow 0$, $J_{-\nu}(x) \longrightarrow \infty$ при $x \longrightarrow +0$, то функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы при $\nu$, не равном целому числу $n$. В таком случае при $\nu$ нецелом всякое решение уравнения Бесселя можно записать в виде

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \quad (9.90)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ называются *функциями Бесселя первого рода порядка* $\nu$ и $-\nu$ соответственно или *цилиндрическими функциями первого рода.*

При $\nu = n$ целом функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы, так как имеет место равенство

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \quad (9.91)$$

Действительно, так как функция $\Gamma(x)$ определена при $x > 0$, то

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}.$$

Положим $k - n = p$. Тогда

$$J_{-n}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,p!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} =$$

$$= (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Итак, при $n$ целом функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ не образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя. Второе решение уравнения Бесселя, линейно независимое с $J_n(x)$, определяется равенством

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}, \quad (9.92)$$

где $\nu$ — нецелое. Функция $N_n(x)$ называется *цилиндрической функцией Бесселя второго рода* или *функцией Неймана*.*

* К. Г. Нейман (1832—1925) — немецкий математик.

Таким образом, при $\nu=n$ целом общее решение уравнения Бесселя имеет вид $y(x)=C_1J_n(x)+C_2N_n(x)$.

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-0{,}25)y=0. \tag{9.93}$$

□ Введем замену $y=u/\sqrt{x}$. Тогда $y'=u'x^{-1/2}-0{,}5ux^{-3/2}$, $y''=u''x^{-1/2}-u'x^{-3/2}+0{,}75ux^{-5/2}$. Подставив $y$, $y'$ и $y''$ в уравнение (9.93) и сократив на $x^{3/2}\neq 0$, получим уравнение $u''+u=0$, общее решение которого имеет вид $u=A\cos x+B\sin x$. Так как $u=y\sqrt{x}$, то общее решение уравнения (9.93) есть

$$y=A\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+B\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \tag{9.94}$$

где $A$ и $B$ — произвольные постоянные. Но, с другой стороны, решением уравнения (9.93) служат функции

$$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2},\quad J_{-1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2},$$

согласно равенствам (9.88) и (9.89). Решения $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ уравнения Бесселя (9.93) можно получить из общего решения (9.94) при определенных константах $A$ и $B$. Найдем эти константы. Имеем

$$A\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+B\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2}=J_{1/2}(x);$$

$$A_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+B_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}=J_{-1/2}(x)$$

или

$$\begin{aligned}A\cos x+B\sin x&=\sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2};\\ A_1\cos x+B_1\sin x&=\sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2}.\end{aligned} \tag{9.95}$$

Положив в первом равенстве (9.95) $x=0$, найдем, что $A=0$, т. е.

$$J_{1/2}(x)=B\sin x/\sqrt{x}. \tag{9.96}$$

Для определения постоянной $B$ разложим $\sin x/\sqrt{x}$ в ряд Тейлора и, подставив в формулу (9.96), получим

$$\frac{1}{(1/2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2}-\frac{1}{(3/2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{5/2}+\frac{1}{2!\,(5/2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{9/2}-\frac{1}{3!\,(7/2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{13/2}+\ldots=$$
$$=Bx^{1/2}-B\frac{x^{5/2}}{3!}+B\frac{x^{9/2}}{5!}-B\frac{x^{13/2}}{7!}+\ldots$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем равенства

$$\frac{1}{((2n+1)/2)!n!2^{2n+1/2}}=\frac{B}{(2n+1)!},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

имеющие место при $B=\sqrt{2/\pi}$. Действительно,

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)! = \left(n+\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(n+3/2) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^{n+1}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\,(2n+1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi},$$

так как по формуле приведения (7.47) $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Тогда

$$B = \frac{(2n+1)!}{((2n+1)/2)!\,n!\,2^{2n+1/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(2n+1)!}{n!\,2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots 2n\,(2n+1)}{n!\,2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2^n(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)}{n!\,2^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{9.97}$$

Аналогично из второго равенства (9.95) при $x=0$ найдем $A_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $B_1 = 0$, так что

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{9.98}$$

**Свойства функций Бесселя.** Получим некоторые из свойств бесселевых функций.

1°. Рекуррентные соотношения. Продифференцировав функцию $J_\nu(x)$, будем иметь

$$J'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\frac{2k+\nu}{2\cdot k!(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{2\cdot k!\,(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} + \frac{\nu}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}$$

Под знаком первой суммы сократим на $2k$ и преобразуем $k+\nu$ и $2k+\nu-1$ следующим образом: $k+\nu=(k-1)+(\nu+1)$, $2k+\nu-1=2(k-1)+(\nu+1)$. Вторую сумму умножим и разделим на $x/2$. В результате получим

$$J'_\nu(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)![(k-1)+(\nu+1)]!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)+(\nu+1)} +$$

$$+\frac{\nu}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x).$$

Таким образом,

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \tag{9.99}$$

или

$$xJ_{\nu+1}(x) = \nu J_\nu(x) - xJ'_\nu(x). \tag{9.100}$$

Если же $2k+\nu$ представить в виде $2k+\nu = 2(k+\nu) - \nu$, то производная $J'_\nu(x)$ запишется следующим образом:

$$J'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2 \cdot k!\,(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [2(k+\nu)-\nu]}{2 \cdot k!\,(k+\nu)!} \times$$

$$\times \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\nu-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} -$$

$$- \frac{\nu}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1}.$$

Умножив и разделив вторую сумму на $x/2$, получим формулу

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \tag{9.101}$$

или

$$xJ_{\nu-1}(x) = xJ'_\nu(x) + \nu J_\nu(x). \tag{9.102}$$

Вычитая равенства (9.99) и (9.101), получаем

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = 2\frac{\nu}{x} J_\nu(x), \tag{9.103}$$

а сложив эти равенства, будем иметь

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x). \tag{9.104}$$

Рассмотрим следующий пример.

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + xy' - (\alpha^2x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{9.105}$$

□ Введем замену $t = \alpha x$. Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \alpha \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2 \frac{d^2y}{dt^2}$. В результате уравнение (9.105) переходит в уравнение Бесселя $t^2y''_{tt} + ty'_t + (t^2 - \nu^2)y = 0$, имеющее при $\nu$ нецелом решение

$$y = C_1J_\nu(t) + C_2J_{-\nu}(t) = C_1J_\nu(\alpha x) + C_2J_{-\nu}(\alpha x),$$

а при $\nu = n$ целом — решение

$$y = C_1J_n(\alpha x) + C_2N_n(\alpha x).$$

2°. Интеграл Ломмеля*. Пусть даны уравнения

$$x^2u'' + xu' + (\beta^2x^2 - \nu^2)u = 0;$$
$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - \nu^2)y = 0,$$

решениями которых, согласно примеру 2, являются функции $u = J_\nu(\beta x)$ и $y = J_\nu(\alpha x)$. Умножив первое уравнение на $y/x$, а второе — на $u/x$, получим

* Е. Ломмель (1837—1899) — немецкий математик.

$$xu''y+u'y+\beta^2xuy-\nu^2uy/x=0;$$
$$xy''u+y'u+\alpha^2xuy-\nu^2uy/x=0.$$

Вычитая из первого равенства второе, будем иметь

$$x(u''y-uy'')+(u'y-y'u)=(\alpha^2-\beta^2)xuy$$

или

$$[x(u'y-y'u)]'=(\alpha^2-\beta^2)xuy.$$

Поскольку $u'=\beta J'_\nu(\beta x)$, $y'=\alpha J'_\nu(\alpha x)$, то из последнего равенства находим

$$\left[x\left(\beta J'_\nu(\beta x)J_\nu(\alpha x)-\alpha J'_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)\right)\right]'=(\alpha^2-\beta^2)xJ_\nu(\beta x)J_\nu(\alpha x). \tag{9.106}$$

В левую часть этого равенства вместо $J'_\nu$ подставим ее значение (9.99) и получим

$$\left\{x\left[\beta J_\nu(\alpha x)\left(\frac{\nu}{\beta x}J_\nu(\beta x)-J_{\nu+1}(\beta x)\right)-\alpha J_\nu(\beta x)\left(\frac{\nu}{\alpha x}J_\nu(\alpha x)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-J_{\nu+1}(\alpha x)\right)\right]\right\}'=[\nu J_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)-x\beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)-$$
$$-\nu J_\nu(\beta x)J_\nu(\alpha x)+x\alpha J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x)]'=[x(\alpha J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x)-$$
$$-\beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x))]'.$$

Отсюда с учетом формулы (9.106) имеем равенство

$$xJ_\nu(\beta x)J_\nu(\alpha x)=\left[\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}(\alpha J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x)-\beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x))\right]'.$$

Интегрируя его от 0 до $x$, найдем

$$\int_0^x sJ_\nu(\beta s)J_\nu(\alpha s)\,ds=\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}[\alpha J_\nu(\beta x)J_{\nu+1}(\alpha x)-\beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)]. \tag{9.107}$$

Эта формула называется *интегралом Ломмеля.*

3°. Корни бесселевых функций. Убедимся, что все корни бесселевых функций, кроме $x=0$, являются простыми. В самом деле, предположим, что $x_0$ — корень бесселевой функции $J_\nu(x)$ кратности 2. Тогда $J_\nu(x_0)=J'_\nu(x_0)=0$. Отсюда в силу теоремы 8.4 существования и единственности решения задачи Коши для уравнения Бесселя заключаем, что $J_\nu(x)\equiv 0$, что неверно. Следовательно, функция $J_\nu(x)$ имеет только простые корни.

Покажем, что все корни бесселевых функций — действительные числа. В самом деле, предположим, что $z=\alpha+i\beta$ является комплексным корнем функции $J_\nu(x)$, т. е. $J_\nu(z)=0$. Так как функция $J_\nu(x)$ имеет действительные коэффициенты, то и число $z=\alpha-i\beta$ тоже является корнем уравнения $J_\nu(x)=0$. Положив в интеграле Ломмеля (9.107) $\alpha=z$, $\beta=\bar z$, будем иметь

$$\int_0^x sJ_\nu(zs)J_\nu(\bar zs)\,ds=\frac{x}{z^2-\bar z^2}[zJ_\nu(\bar zx)J_{\nu+1}(zx)-\bar zJ_\nu(zx)J_{\nu+1}(\bar zx)].$$

Отсюда при $x=1$, учитывая, что $J_\nu(\bar{z})=J_\nu(z)=0$, получаем

$$\int_0^1 sJ_\nu(zs)\,J_\nu(\bar{z}s)\,ds=\int_0^1 s\,|J_\nu(zs)|^2 ds=0,$$

что невозможно, так как $\int_0^1 s\,|J_\nu(zs)|^2 ds>0$. Полученное противоречие свидетельствует о том, что у функции $J_\nu(x)$ не может быть комплексных корней.

4°. Ортогональность и норма бесселевых функций. Система функций $\{\varphi_n(x)\}$, $n=0, 1, \ldots$, называется *ортогональной на отрезке* $[a, b]$ *с весом* $\rho(x)\geqslant 0$, если выполнено равенство

$$\int_a^b \rho(x)\,\varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx=0,\quad n\neq m. \tag{9.108}$$

Функция $\rho(x)\not\equiv 0$, $\forall\, x\in[a, b]$, называется *весовой функцией. Нормой функции* $\varphi_n(x)$ *с весом* $\rho(x)$ называется число

$$\|\varphi_n(x)\|=\sqrt{\int_a^b \rho(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx}\,. \tag{9.109}$$

Покажем, что функции Бесселя $J_\nu(\alpha_i x)$, где $\alpha_i$ — корни $J_\nu(x)$, $i=1, 2, \ldots$, ортогональны на отрезке $[0, 1]$ с весом $\rho(x)=x$. В самом деле, так как $J_\nu(\alpha_i)=0$, $i=1, 2, \ldots$, то из интеграла Ломмеля (9.107) имеем

$$\int_0^1 sJ_\nu(\alpha_i s)\,J_\nu(\alpha_j s)\,ds=0,\quad i\neq j,$$

или

$$\int_0^1 xJ_\nu(\alpha_i x)\,J_\nu(\alpha_j x)\,dx=0,\quad i\neq j, \tag{9.110}$$

т. е., действительно, функции Беселля $J_\nu(\alpha_i x)$ ортогональны с весом $\rho(x)=x$ на отрезке $[0, 1]$.

Найдем теперь норму бесселевой функции $J_\nu(\alpha_i x)$, $i=1, 2, \ldots$ По формуле (9.109) имеем

$$\|J_\nu(\alpha_i x)\|=\sqrt{\int_0^1 xJ_\nu^2(\alpha_i x)\,dx}\,. \tag{9.111}$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (9.111) воспользуемся интегралом Ломмеля (9.107) при $x=1$. Имеем

$$\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,dx=\frac{\alpha J_\nu(\beta)\,J_{\nu+1}(\alpha)-\beta J_\nu(\alpha)\,J_{\nu+1}(\beta)}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Если $\alpha=\beta$ — корни уравнения $J_\nu(x)=0$, то выражение справа в этом равенстве есть неопределенность типа 0/0. Раскроем ее по правилу Лопиталя. Имеем

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(\alpha x)\,dx = \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\alpha J_\nu'(\beta)\,J_{\nu+1}(\alpha) - J_\nu(\alpha)\,J_{\nu+1}(\beta) - \beta J_\nu(\alpha)\,J_{\nu+1}'(\beta)}{-2\beta} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha}{\beta}J_\nu'(\beta)\,J_{\nu+1}(\alpha),$$

так как $J_\nu(\alpha)=J_\nu(\beta)=0$. Используя теперь последовательно формулы (9.104) и (9.102), получаем

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(\alpha x)\,dx = -\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\alpha}J_\nu'(\beta)\left[J_{\nu-1}(\alpha) - 2J_\nu'(\alpha)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\alpha}J_\nu'(\beta)\left[J_\nu'(\alpha) - \frac{\nu}{\alpha}J_\nu(\alpha) - 2J_\nu'(\alpha)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\beta\to\alpha}J_\nu'(\beta)J_\nu'(\alpha) = \frac{1}{2}\left[J_\nu'(\alpha)\right]^2.$$

Положив в последнем равенстве $\alpha=\alpha_i$, где $\alpha_i$ — корень функции $J_\nu(x)$, для нормы (9.111) получим формулу

$$\|J_\nu(\alpha_i x)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}J_\nu'(\alpha_i),\quad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{9.112}$$

**Задачи и упражнения**

1. Показать, что дифференциальное уравнение приводится к уравнению Бесселя, и найти его решение:

а) $y''+y=0$ (ввести замену $y=u\sqrt{x}$);

б) $y''+\dfrac{2n+1}{x}y'+y=0$ (ввести замену $y=x^{-n}u$).

2. Доказать равенство $J_{3/2}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left(\dfrac{\sin x}{x}-\cos x\right)$.

3. Получить формулы $\left(x^\nu J_\nu(x)\right)'=x^\nu J_{\nu-1}(x)$, $\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right)'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$, умножая равенство (9.102) на $x^{\nu-1}$, а равенство (9.100) — на $x^{-\nu-1}$.

## 10. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

### 10.1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ *

**Ортогональные системы функций.** Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, такие, что их произведение $f(x)\varphi(x)$ есть интегрируемая на $[a, b]$ функция. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются *ортогональными* на $[a, b]$, если

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0. \tag{10.1}$$

Бесконечная система функции

$$\{\varphi_n(x)\} = \{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots\}$$

называется *ортогональной* на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0, \quad \forall n \neq m. \tag{10.2}$$

Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *ортонормированной* на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ 1, & n = m, \end{cases} \tag{10.3}$$

где $\delta_{nm}$ — символ Кронекера.

Приведем примеры ортогональных систем.

**Пример 1.** Рассмотрим *тригонометрическую систему функций*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{10.4}$$

Покажем, что эта система ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$, а значит, в силу $2\pi$-периодичности функций (10.4) ортогональна и на любом отрезке $[a, a+2\pi]$ длиной $2\pi$.

В самом деле,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0; \tag{10.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n; \end{cases} \tag{10.6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)x - \sin(m-n)x]\,dx = 0, \ \forall m, n; \tag{10.7}$$

* Ж. Б. Фурье (1768—1830) — французский математик.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n. \end{cases} \quad (10.8)$$

Равенства (10.5) — (10.8) показывают, что функции (10.4) действительно образуют ортогональную систему на $[-\pi, \pi]$.

**Пример 2.** Аналогично показывается, что системы функций

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots \quad (10.9)$$

и

$$\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots \quad (10.10)$$

являются ортогональными на отрезке $[0, \pi]$.

**Пример 3.** Система функций

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots, \quad (10.11)$$

периодических с периодом $T=2l$, ортогональна на отрезке $[-l, l]$, а значит, и на любом отрезке $[a, a+2l]$ длиной $2l$.

Доказательство этого факта приводится так же, как и в примере 1. Вычислим лишь интегралы от квадратов функций (10.11):

$$\int_{-l}^{l} 1^2 \cdot dx = 2l;$$

$$\int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 + \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l; \quad (10.12)$$

$$\int_{-l}^{l} \sin^2\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l.$$

**Пример 4.** Система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \quad (10.13)$$

является ортонормированной на отрезке $[-\pi, \pi]$, а система

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{\cos\frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{\sqrt{l}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots \quad (10.14)$$

ортонормирована на отрезке $[-l, l]$, в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой равенств (10.3).

**Тригонометрический ряд Фурье $2\pi$-периодической функции.** Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом $2\pi$. Можно ли представить ее суммой ряда вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)? \quad (10.15)$$

Предположим, что ряд в правой части равенства (10.15) сходится равномерно. Тогда по теореме 9.17 его можно почленно интегрировать в пределах от $-\pi$ до $\pi$. В результате получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx\right).$$

В силу равенства (10.5) интегралы под знаком суммы равны нулю. Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{10.16}$$

Умножим теперь обе части равенства (10.15) на $\cos nx$ и результат проинтегрируем в тех же пределах:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos nx dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos nx dx\right).$$

Отсюда в силу ортогональности тригонометрической системы функций с учетом равенств (10.5) — (10.7) получим равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = \pi a_n,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{10.17}$$

Аналогично, умножив равенство (10.15) на $\sin nx$ и интегрируя результат в пределах от $-\pi$ до $\pi$, найдем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n = 1,\ 2,\ \ldots \tag{10.18}$$

Итак, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и может быть разложена в тригонометрический ряд (10.15), то коэффициенты $a_n$ и $b_n$ этого ряда вычисляются по формулам (10.16) — (10.18). Эти коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (10.15) с такими коэффициентами — ее *рядом Фурье*.

Так как по предположению $f(x)$ — $2\pi$-периодическая функция, то отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ в формулах (10.16) — (10.18) может быть заменен произвольным отрезком $[a, a+2\pi]$ длиной $2\pi$. Тогда коэффициенты Фурье $a_n$ и $b_n$ могут быть вычислены по формулам

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (10.19)$$

Формулы (10.16) — (10.18) или (10.19) показывают, что коэффициенты Фурье могут быть вычислены для любой интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ $2\pi$-периодической функции. Это значит, что для такой функции всегда можно составить ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Такая запись означает лишь, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье, написанный справа.

Возникает вопрос: каким условиям должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы ее ряд Фурье сходился к ней?

Напомним, что функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется кусочно-гладкой, если она и ее производная имеют не более конечного числа точек разрыва, и притом лишь первого рода.

Следующая теорема дает достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.

**Теорема 10.1** (Дирихле). Пусть $2\pi$-периодическая функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на $[-\pi, \pi]$. Тогда ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности и к значению $0{,}5[f(x+0)+f(x-0)]$ в точке разрыва, т. е. для кусочно-гладкой $2\pi$-периодической функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \qquad (10.20)$$

Если кроме кусочной гладкости от функции $f(x)$ потребовать ее непрерывность, то имеет место более сильное утверждение.

**Теорема 10.2.** Если $2\pi$-периодическая функция $f(x)$ непрерывна на всей оси и кусочно-гладка, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно.

Приведем примеры разложения функции в ряд Фурье.

**Пример 5.** Разложить в ряд Фурье $2\pi$-периодическую функцию

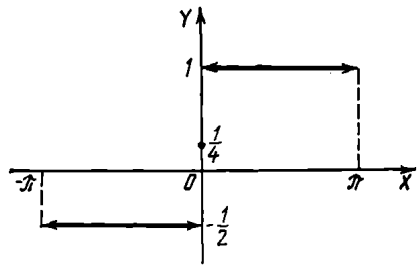



Рис. 10.1

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & -\pi < x < 0; \\ 1, & 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

□ График этой функции приведен на рис. 10.1. Вычисляем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)dx + \int_{0}^{\pi} dx\right] = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right] = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{3\,[1-(-1)^n]}{2n\pi},$$

так как $\cos n\pi = (-1)^n$, т. е. $b_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, b_{2k+1} = \dfrac{3}{\pi(2k+1)}$, $k = 0, 1, \ldots$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому в точках ее непрерывности имеет место равенство

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = f(x),$$

а в точке $x=0$ сумма полученного ряда равна 1/4, так как

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 1/4.$$

**Пример 6.** Разложить в ряд Фурье $2\pi$-периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases}\cos x, & -\pi/2 \leqslant x < \pi/2;\\ 0, & \pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2\end{cases}$$

и построить график функции и суммы ее ряда Фурье.

□ По формулам (10.19) имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx = \frac{2}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cdot\cos nx\,dx = (-1)^{k+1}\,\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{4k^2-1},\quad n = 2k,\ k = 1, 2, \ldots;$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cdot\sin nx\,dx = 0.$$

Таким образом, искомый ряд Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

Так как исходная функция $f(x)$ — $2\pi$-периодическая и непрерывная для всех $x \in \mathbf{R}$, то график $f(x)$ совпадает в соответствии с теоремой Дирихле с графиком суммы ее ряда Фурье (рис. 10.2).

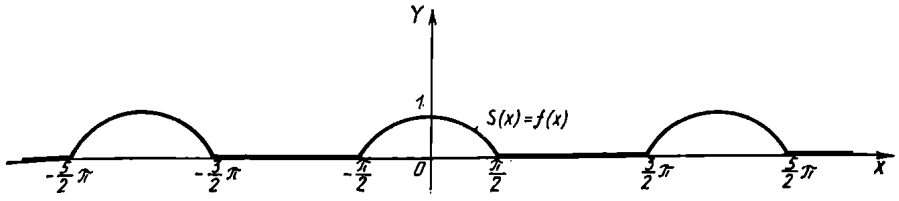



Рис. 10.2

**Разложение четных и нечетных функций в ряд Фурье.** Пусть $f(x)$ — четная $2\pi$-периодическая функция. Тогда $f(x)\sin nx$ является нечетной, а $f(x)\cos nx$ — четной функцией. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Тогда, согласно формулам (10.16) — (10.18), для коэффициентов ряда Фурье получаем

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n = 0,\ 1,\ \ldots;\ b_n = 0,\ n = 1,\ 2,\ \ldots, \quad (10.21)$$

т. е. ряд Фурье для четной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (10.22)$$

Итак, четная $2\pi$-периодическая функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам.

Аналогично если $f(x)$ — нечетная $2\pi$-периодическая функция, то $f(x)\cos nx$ — нечетная, а $f(x)\sin nx$ четная функции. В этом случае, согласно формулам (10.16) — (10.18), имеем

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1,\ 2,\ \ldots;\ a_n = 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad (10.23)$$

и ряд Фурье для нечетной функции имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (10.24)$$

Таким образом, нечетная $2\pi$-периодическая функция разлагается в ряд Фурье только по синусам.

**Пример 7.** Разложить в ряд $2\pi$-периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/4, & -\pi < x < 0; \\ \pi/4, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

□ Поскольку функция $f(x)$ нечетная, то по формуле (10.23) получаем

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{2n}\Big|_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^n}{2n} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \ldots; \\ 1/n, & n = 2k+1, \quad k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Таким образом, искомый ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots$$

График $f(x)$ приведен на рис. 10.3. Точками обозначены значения суммы полученного ряда Фурье при $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. В точках непрерывности $f(x)$ график суммы ряда совпадает с самой функцией.

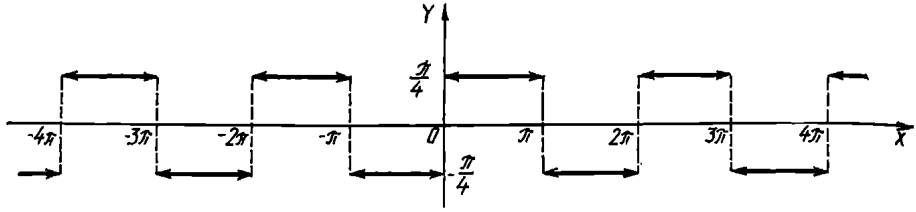



Рис. 10.3

**Ряд Фурье для функции, заданной на отрезке длины $2\pi$.** Рассмотрим задачу о разложении в тригонометрический ряд Фурье непериодической функции $f(x)$, заданной на отрезке длины $2\pi$, например на $[-\pi, \pi]$. Поскольку в формулах (10.16) — (10.18) интегрирование ведется в пределах от $-\pi$ до $\pi$, то функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье (10.15). Если периодически продолжить $f(x)$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ на всю ось $X$, то получим периодическую функцию, совпадающую с $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, для которой ряд Фурье тождествен с рядом Фурье для исходной функции $f(x)$.

Итак, ряд Фурье для функции $f(x)$, рассматриваемой на $[-\pi, \pi]$,— это ряд Фурье для функции, получающейся из $f(x)$ периодическим продолжением ее с периодом $2\pi$ на всю ось. На отрезке $[-\pi, \pi]$ ряд Фурье будет представлять функцию $f(x)$ в смысле теоремы Дирихле. Вне отрезка $[-\pi, \pi]$ сумма ряда Фурье $S(x)$ не совпадает в общем случае с $f(x)$ (рис. 10.4).

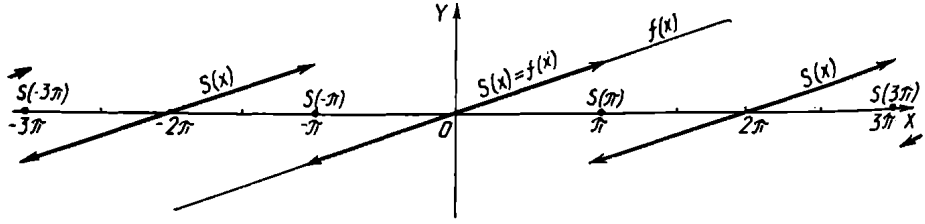



Рис. 10.4

Если непериодическая функция $f(x)$ задана не на отрезке $[-\pi, \pi]$, а на любом другом отрезке $[a, a+2\pi]$ длины $2\pi$, то ее ряд Фурье имеет по-прежнему вид (10.15), в котором коэффициенты Фурье вычисляются по формулам (10.19).

**Пример 8.** Разложить в ряд Фурье непериодическую функцию $f(x)=\cos ax$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, $a$ — нецелое число.

□ Функция $f(x)$ — четная, поэтому все коэффициенты $b_n$ равны нулю, а для коэффициентов $a_n$ по формуле 10.21 имеем

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}\right] =$$
$$= \frac{2}{\pi} a \sin a\pi \frac{\cos n\pi}{a^2-n^2} = \frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{a \sin a\pi}{a^2-n^2},$$

откуда

$$\cos ax = \frac{2a \sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2-1^2} + \frac{\cos 2x}{a^2-2^2} - \frac{\cos 3x}{a^2-3^2} + \ldots\right]. \quad (10.25)$$

Полученный ряд сходится равномерно к $\cos ax$ на $[-\pi, \pi]$, так как $2\pi$-периодическое продолжение $\cos ax$ на всю ось $X$ дает функцию, непрерывную в точках $-\pi$ и $\pi$.

Положив в формуле (10.25) $x=\pi$ и обозначив $a$ через $x$, после деления на $\sin \pi x$ получим

$$\operatorname{ctg} \pi x = \frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2-1^2} + \frac{1}{x^2-2^2} + \frac{1}{x^2-3^2} + \ldots\right)$$

или

$$\operatorname{ctg} \pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi}\left(\frac{1}{1^2-x^2} + \frac{1}{2^2-x^2} + \frac{1}{3^2-x^2} + \ldots\right). \quad (10.26)$$

Если $0 \leqslant x \leqslant \alpha < 1$, то общий член ряда (10.26) меньше общего члена сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\alpha^2}$. Следовательно, ряд (10.26) сходится равномерно, и, значит, обе части равенства (10.26) можно проинтегрировать от 0 до $x$, $0 \leqslant x \leqslant \alpha < 1$. Сокращая на $1/\pi$ и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} \ln \frac{\sin \pi x}{x} = \ln \pi$, будем иметь

$$\ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

или после потенцирования

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\ldots$$

Отсюда получаем формулу

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\ldots,$$

где символ $\prod_{n=1}^{\infty}$ означает *бесконечное произведение*. При $x=1/2$ будем иметь формулу Валлиса *

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\ldots$$

**Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[0, \pi]$.** Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, \pi]$. Чтобы разложить $f(x)$ на этом отрезке в ряд Фурье, доопределим ее на отрезке $[-\pi, 0]$.

* Дж. Валлис (1616—1703) — английский математик.

В результате получим функцию, заданную на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, которую можно уже разложить в ряд Фурье. Ясно, что получившийся ряд будет зависеть от характера продолжения первоначальной функции на отрезок $[-\pi, 0]$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Если продолжить (доопределить) $f(x)$ *четным образом* с отрезка $[0, \pi]$ на $[-\pi, 0]$ (рис. 10.5, *а*), то получим четную функцию, которая в соответствии с изложенным выше разлагается в ряд Фурье (10.22) по косинусам с коэффициентами (10.21).

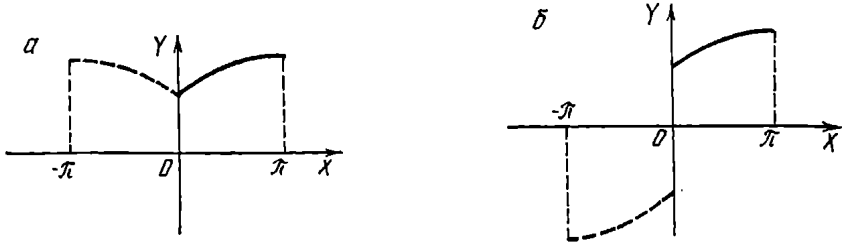



Рис. 10.5

Заметим, что в подынтегральной функции здесь фигурируют лишь заданные на отрезке $[0, \pi]$ значения $f(x)$. Это значит, что на практике фактически можно и не осуществлять указанное выше четное продолжение.

2. Аналогично, продолжая $f(x)$ *нечетным образом* с отрезка $[0, \pi]$ на $[-\pi, 0]$ (рис. 10.5, *б*), получим нечетную функцию, разлагающуюся в ряд Фурье (10.24) по синусам с коэффициентами (10.23).

*Замечание.* Для определения значений суммы ряда Фурье функции, заданной на отрезке $[0, \pi]$, в точках $x=0$ и $x=\pi$ рекомендуется иметь эскиз графика $f(x)$ с ее четным или нечетным продолжением на отрезок $[-\pi, 0]$ и с последующим $2\pi$-периодическим продолжением на всю ось $X$. Поясним сказанное примерами.

**Пример 9.** Разложить на отрезке $[0, \pi]$ функцию $f(x)=x$ в ряд Фурье: 1) по синусам; 2) по косинусам.

□ 1) Продолжая $f(x)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ нечетным образом с последующим $2\pi$-периодическим продолжением на всю числовую ось, получаем периодическую функцию, график которой изображен на рис. 10.6. Находим коэффициенты Фурье

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi} x \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx = (-1)^{n+1} 2/n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Тогда искомый ряд Фурье имеет вид $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$. Так как полученная $2\pi$-периодическая функция непрерывна в точке $x = 0$ и разрывна при $x = \pi$, то отсюда следует равенство

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,\ 0 \leqslant x < \pi,$$

В точке $x=\pi$ сумма ряда Фурье, согласно теореме Дирихле, равна нулю (см. рис. 10.6).

2) Осуществив четное продолжение функции на отрезок $[-\pi, 0]$ и $2\pi$-периодическое продолжение на всю числовую ось, получим периодическую функцию, изображенную на рис. 10.7, непрерывную во всех точках оси $X$. Находим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi;\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2} = \begin{cases} 0, & n=2k, \quad k=1,\ 2,\ \ldots; \\ -4/(\pi n)^2, & n=2k+1,\ k=0,\ 1,\ \ldots \end{cases}$$

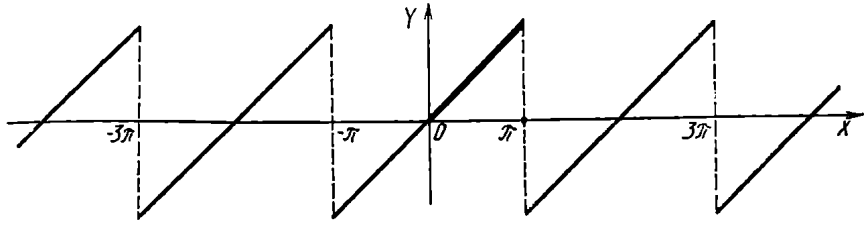



Рис. 10.6

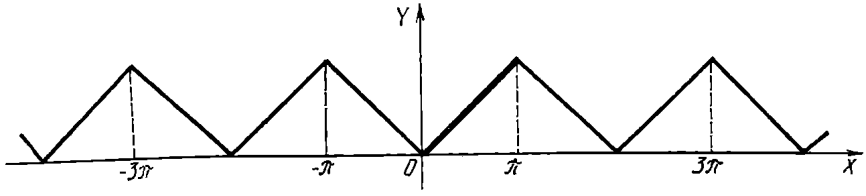



Рис. 10.7

Таким образом, ряд Фурье по косинусам имеет вид $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

В силу непрерывности $2\pi$-периодической функции получим окончательное равенство

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Положив здесь $x=0$, найдем, что $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, т. е. $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$.

**Ряд Фурье для функций с произвольным периодом.** Пусть функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, периодична с периодом $T=2l$ $(l \neq \pi)$, т. е. $f(x+2l) = f(x)$. Введем замену $x = \frac{l}{\pi}\tau$. Тогда функция $\varphi(\tau) = f\left(\frac{l}{\pi}\tau\right)$ будет $2\pi$-периодической.

Действительно,

$$\varphi(\tau+2\pi)=f\left[\frac{l}{\pi}(\tau+2\pi)\right]=f\left(\frac{l}{\pi}\tau+2l)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}\tau\right)=\varphi(\tau).$$

В таком случае функцию $f\left(\frac{l}{\pi}\tau\right)$ можно разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$f\left(\frac{l}{\pi}\tau\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\tau+b_n\sin n\tau),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}\tau\right)\cos n\tau d\tau,\ n=0,\ 1,\ \ldots;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}\tau\right)\sin n\tau d\tau,\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

Возвращаясь к прежней переменной $x$, т. е. положив $\tau=\pi x/l$, получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad(10.27)$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=0,\ 1,\ \ldots;\qquad(10.28)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=1,\ 2,\ \ldots\qquad(10.29)$$

Заметим, что формулы (10.27) — (10.29) совпадают с формулами (10.15) — (10.18) при $l=\pi$. Это значит, что все вышеизложенные рассуждения можно повторить и для $2l$-периодических функций заменой $\pi$ на $l$. В частности, если $2l$-периодическая функция задана на отрезке $[a, a+2l]$, то интегрирование в формулах (10.28) и (10.29) нужно вести в пределах от $a$ до $a+2l$.

Если $f(x)$ — четная функция, то $b_n=0$, $n=1, 2, \ldots$,

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=0,\ 1,\ \ldots\qquad(10.30)$$

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то $a_n=0$, $n=0, 1, \ldots$,

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,\ 2,\ \ldots\qquad(10.31)$$

Этот факт дает возможность разложить в ряд Фурье по косинусам или синусам функцию, заданную на отрезке $[0, l]$ четным или нечетным ее продолжением на отрезок $[-l, 0]$. Замечание относительно суммы ряда в точках $x=0$ или $x=l$, аналогичное имевшему место при разложении функции в ряд Фурье на $[0, \pi]$, сохраняется и здесь.

**Пример 10.** Функция периода $2l=2$ задана на отрезке $[-1, 1]$ равенством

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0;\\ x, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Разложить ее в ряд Фурье.

□ Данная функция на отрезке $[-1, 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле 10.1. Находим коэффициенты Фурье по формулам (10.28), (10.29):

$$a_0=\int_{-1}^{0}0\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=\frac{1}{2};$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_{0}^{1}x\cos n\pi x\,dx=-\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}=$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k, \quad k=1, 2, \ldots;\\ -2/n^2\pi^2, & n=2k+1, \quad k=0, 1, \ldots;\end{cases}$$

$$b_n=\int_{0}^{1}x\sin n\pi x\,dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

По формуле (10.27) записываем искомый ряд Фурье

$$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin k\pi x.$$

Сумма этого ряда в точках $x=\pm 1, \pm 3, \ldots$ равна, очевидно, 1/2 (рис. 10.8).

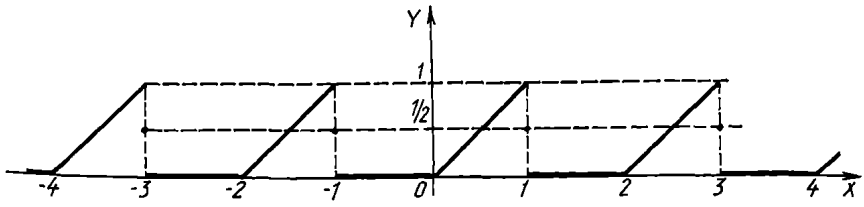



Рис. 10.8

**Пример 11.** Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|\sin x|$.

□ Данная функция — четная, ее период $2l=\pi$. Согласно формуле (10.30), имеем

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\sin x\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}[\sin(1+2n)x+\sin(1-2n)x]\,dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)-1}{1+2n}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)-1}{1-2n}\right]=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}, \quad n=0,1, \ldots$$

Таким образом, получаем равенство

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{1-4n^2},$$

имеющее место при всех $x \in \mathbf{R}$. В частности, при $x=0$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

**Комплексная форма ряда Фурье.** Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) - \qquad (10.32)$$

ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Воспользовавшись формулами Эйлера $\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$, получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} - ib_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right).$$

Введем обозначения

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n-ib_n}{2} = c_n, \quad \frac{a_n+ib_n}{2} = c_{-n}. \qquad (10.33)$$

Тогда

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1}c_ne^{inx},$$

т. е.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}. \qquad (10.34)$$

Это и есть *комплексная форма ряда Фурье* функции $f(x)$ с *комплексными коэффициентами Фурье* $c_n$, определяемыми формулами (10.33). Заметим, что $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Получим явное выражение для коэффициентов Фурье $c_n$. Согласно формулам (10.33), (10.16) — (10.18), имеем

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\cos(-nx) + i\sin(-nx)]\,dx.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, окончательно получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx. \tag{10.35}$$

Легко проверить, что эта формула справедлива при любом целом $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Итак, $2\pi$-периодическую функцию $f(x)$ можно разложить на $[-\pi, \pi]$ в комплексный ряд Фурье (10.34) с комплексными коэффициентами Фурье (10.35).

Если $f(x)$ задана на отрезке $[-l, l]$ (или $2l$-периодична), то ее комплексный ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \tag{10.36}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx. \tag{10.37}$$

Часто ставится задача: зная комплексный ряд Фурье функции $f(x)$, написать ее действительный ряд Фурье. Эта задача решается следующим образом. Из формулы (10.33) получаем:

$$a_n = \operatorname{Re} 2c_n;\ b_n = -\operatorname{Im} 2c_n;\ a_0/2 = c_0, \tag{10.38}$$

и теперь только остается записать ряд (10.32).

**Пример 12.** Разложить в комплексный ряд Фурье функцию $f(x) = e^{\alpha x}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$.

□ Имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha - in)x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(\alpha - in)x}}{\alpha - in} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{(\alpha - in)\pi} - e^{-(\alpha - in)\pi}}{\alpha - in}.$$

Так как $e^{in\pi} = (-1)^n$ при любом целом $n$, то

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(\alpha - in)} \left(e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}\right) = \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{\alpha - in}.$$

Таким образом, искомое разложение

$$e^{\alpha x} = \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha - in} e^{inx}.$$

Если теперь воспользоваться формулами (10.38), то нетрудно получить разложение искомой функции в действительный ряд Фурье $(-\pi < x < \pi)$:

$$e^{\alpha x} = \frac{\operatorname{sh} \alpha\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2} (\alpha \cos nx - n \sin nx)\right].$$

**Понятие о спектрах.** Тригонометрические ряды Фурье широко применяются в радиотехнике, механике колебательных процессов, теории распространения тепла и в других приложениях.

Выражение $a_n\cos nx+b_n\sin nx$ в ряде Фурье (10.15) называется *n-й гармоникой*. Известно, что

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=A_n\cos(nx-\varphi_n), \tag{10.39}$$

где

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\ \sin\varphi_n=b_n/A_n,\ \cos\varphi_n=a_n/A_n. \tag{10.40}$$

Величина $A_n$ называется *амплитудой* $n$-й гармоники (10.39), $\varphi_n$ — *фазой*, $n$ — ее *частотой*. *Периодом гармоники* (10.39) является величина $T_n=2\pi/n$, $n=1, 2, \ldots$

Таким образом, ряд Фурье (10.15) $2\pi$-периодической функции $f(x)$, который теперь можно записать в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(nx-\varphi_n),$$

представляет собой разложение функции $f(x)$ по гармоникам (10.39). Величина $a_0/2$ называется *постоянной составляющей* этого разложения. Аналогично функция $e^{inx}$ называется *n-й комплексной гармоникой*, и, значит, ряд (10.34) представляет собой разложение функции $f(x)$ по комплексным гармоникам.

Совокупность операций, в результате выполнения которых могут быть определены гармоники функции $f(x)$, называется *гармоническим анализом*.

Пусть $f(x)$ — периодическая функция. Совокупность коэффициентов $a_n$, $b_n$, $n=1, 2, \ldots$, разложения в ряд Фурье называется *частотным спектром* этой функции. Из формул (10.16) — (10.18) следует, что $a_n=a_n(n)$, $b_n=b_n(n)$, если $f(x)$ — $2\pi$-периодическая функция. Если же период функции $f(x)$ равен $2l$, то $a_n=a_n(n\pi/l)$, $b_n=b_n(n\pi/l)$. Графически спектры изображаются в виде отрезков длины $|a_n|$, $|b_n|$, проведенных перпендикулярно к оси, на которую наносится значение $n$ или $n\pi/l$. Так как $n=1, 2, \ldots$, то частотные спектры имеют дискретный характер, причем расстояние между отдельными линиями спектра равно $\pi/l$ для $2l$-периодической функции и равно единице для функции периода $2\pi$. На рис. 10.9 изображен частотный спектр $a_n$ функции периода $2\pi$.

Совокупности

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad \varphi_n=\operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}$$

называются *амплитудным* и *фазовым частотным спектром* периодической функции соответственно. Для четной функции $A_n=|a_n|$, $\varphi_n=0$, так как все $b_n=0$, а для нечетной функции $A_n=|b_n|$, $\varphi_n=\pi/2$, так как все $a_n=0$. Спектры $A_n$ и $\varphi_n$ также изображаются графически в виде отдельных линий.

Совокупность комплексных чисел $C_n=2c_n$, определяемая формулой (10.37), называется *комплексным амплитудным частотным* спектром.

**Пример 13.** Определить частотные спектры $2\pi$-периодической *функции*

$$f(x)=\begin{cases} a, & 0\leqslant x\leqslant \pi;\\ -a, & \pi<x<2\pi.\end{cases}$$

□ Разложив функцию $f(x)$ в ряд Фурье, получим $b_n=0$ при $n$ четном и $b_n=4a/(\pi n)$ при $n$ нечетном; $a_n=0$. Таким образом, $A_n=b_n$, $\varphi_n=\pi/2$. График $b_n$ приведен на рис. 10.10.

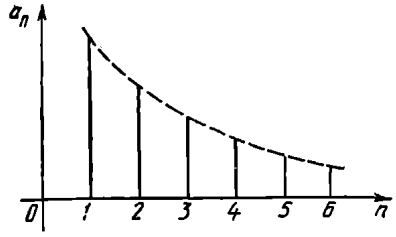



Рис. 10.9

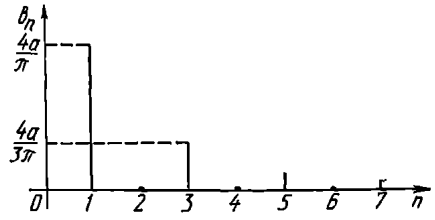



Рис. 10.10

Между периодическими функциями и их частотными спектрами существует взаимно однозначное соответствие: периодическая функция полностью определяет свой частотный спектр и, наоборот, по частотному спектру можно определить периодическую функцию.

**Задачи и упражнения**

1. Показать, что

$$\frac{\pi-x}{2}=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\ \dots\ +\frac{\sin nx}{n}+\ \dots\ (0<x<2\pi).$$

2. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant h;\\ 0, & h<x\leqslant \pi.\end{cases}$$

3. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leqslant x<l/2;\\ 0, & l/2<x\leqslant l.\end{cases}$$

4. Написать ряд Фурье и коэффициенты Фурье для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$.

## 10.2. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

**Скалярное произведение функций. Норма функций.** Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется функцией с *интегрируемым квадратом,* если она сама и ее квадрат интегрируемы на $[a, b]$, т. е. если существуют интегралы

$$\int_a^b f(x)\,dx \ \text{ и } \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ являются функциями с интегрируемым квадратом на $[a, b]$. Тогда из очевидного неравенства

$$(f-g)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow |f \cdot g| \leqslant \frac{1}{2}(f^2+g^2)$$

вытекает интегрируемость функции $|f(x)\cdot g(x)|$ на $[a, b]$.

В дальнейшем всюду предполагается, если не оговорено особо, что рассматриваемые функции являются функциями с интегрируемым квадратом.

Скалярным произведением двух действительных функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$, называется число

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{10.41}$$

*Нормой* действительной функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется число

$$\|f(x)\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}\,. \tag{10.42}$$

Функция $f(x)$ называется *нормированной*, если норма ее равна единице.

**Пример 1.** В силу формул (10.6) и (10.8) имеем, что на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$\|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi},\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ \|1\| = \sqrt{2\pi},$$

а, согласно формулам (10.12), на отрезке $[-l, l]$

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\| = \left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\| = \sqrt{l},\ \|1\| = \sqrt{2l}.$$

Нетрудно видеть, что системы функций (10.13) и (10.14) являются нормированными.

Всякую систему функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ..., не содержащую тождественно равной нулю функции, можно *нормировать*, т. е. можно подобрать числа $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ так, чтобы система $\mu_0\varphi_0(x)$, $\mu_1\varphi_1(x)$, ..., $\mu_n\varphi_n(x)$, ... была нормированной. В самом деле, из равенства

$$\|\mu_n\varphi_n\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\int_a^b \mu_n^2\varphi_n^2(x)\, dx} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\mu_n| \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx} = 1 \Leftrightarrow |\mu_n| \cdot \|\varphi_n\| = 1$$

следует, что

$$\mu_n = \frac{1}{\pm\|\varphi_n\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx}} \tag{10.43}$$

(знак у корня можно брать любой).

Число $\mu_n = 1/(\pm\|\varphi_n\|)$ называется *нормирующим множителем.* В дальнейшем будем брать его со знаком плюс.

Итак, чтобы нормировать некоторую систему функций, надо каждую функцию системы умножить на соответствующий ее нормирующий множитель.

**Ортогональные функции.** Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *ортогональными* на отрезке $[a, b]$, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

$$(f, g) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0. \qquad (10.44)$$

Заметим, что определение ортогональности функций, данное формулой (10.44), полностью совпадает с аналогичным определением ортогональности по формуле (10.1).

Система нормированных функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... называется *ортонормированной*, если составляющие этой системы ортогональны, т. е. если

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases} \qquad (10.45)$$

Примерами ортонормированных систем функций являются функции (10.13) и (10.14) на отрезках $[-\pi, \pi]$ и $[-l, l]$ соответственно.

**Многочлены Лежандра*.** Классическим примером ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ функций являются *многочлены Лежандра.* Они определяются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \cdot \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}. \qquad (10.46)$$

Будучи $n$-й производной многочлена степени $2n$, многочлен Лежандра $P_n(x)$ имеет степень $n$. Выполняя последовательно дифференцирование, найдем несколько первых многочленов:

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

. . . . . .

Покажем, что многочлены Лежандра ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, т. е. что

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n.$$

* А. Лежандр (1752—1833) — французский математик.

Поскольку $m$ и $n$ входят в равенство (10.47) симметрично, достаточно показать, что это равенство выполняется при $m<n$.

Предварительно докажем, что при $m<n$ справедливо равенство

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = 0.$$

В самом деле, согласно формуле (10.46), имеем

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\, dx, \quad m < n.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = \frac{1}{2^n n!}\left[x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]\Bigg|_{-1}^{1} - \frac{m}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^{m-1} \times$$

$$\times \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx.$$

Так как $\pm 1$ — корни многочлена $u_n(x) = (x^2-1)^n$ кратности $n$, то $u_n(\pm 1) = u_n'(\pm 1) = \ldots = u_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0$, и, значит, внеинтегральный член в правой части полученного выше соотношения равен нулю. Продолжив интегрирование по частям, получим выражение

$$I = \frac{(-1)^{m+1} m!}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n\, dx = \frac{(-1)^{m+1} m!}{2^n n!}\left[\frac{d^{n-m+1}}{dx^{n-m+1}}(x^2-1)^n\right]\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

Следовательно, $I = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^m\, dx = 0$. Отсюда вытекает, что интеграл $\int_{-1}^{1} P(x)\, P_n(x)\, dx$ равен нулю для всякого многочлена $P(x)$ степени, меньшей $n$. Если, в частности, $P(x) = P_m(x)$ — многочлен Лежандра, $m < n$, то тем самым получаем равенство (10.47). Итак, многочлены Лежандра ортогональны на $[-1, 1]$.

Вычислим теперь норму многочлена Лежандра $P_n(x)$. Имеем в силу формулы (10.46)

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\, dx.$$

Интегрируем $n$ раз по частям. Заметив, что все внеинтегральные члены равны нулю, получим

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n\, dx.$$

Но

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^{2n} - nx^{2n-2} + \ldots) = (2n!)$$

и

$$(-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,dx = 2\,\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots (2n+1)}.$$

В таком случае окончательно получаем, что

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{(2n)!\cdot 2\cdot 2\cdot 4\cdot 2n}{2^{2n}(n!)^2\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{2n+1},$$

т. е. норма многочленов Лежандра на $[-1, 1]$ равна

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \qquad (10.48)$$

Итак, многочлены Лежандра $P_n(x)$ образуют на $[-1, 1]$ систему ортогональных функций. Чтобы эта система стала ортонормированной, достаточно разделить соответствующие многочлены на $\sqrt{2/(2n+1)}$.

**Ряд Фурье по ортогональной системе функций.** Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы интегрируемая функция $f(x)$ и система ортогональных функций $\{\varphi_n(x)\}$. Предположим, что $f(x)$ можно представить на $[a, b]$ в виде ряда

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x), \quad (10.49)$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ — постоянные, называемые коэффициентами ряда. Найдем их. Предположив, что ряд (10.49) сходится на $[a, b]$ к $f(x)$ равномерно, умножим обе части равенства (10.49) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем результат почленно на $[a, b]$. Тогда, учитывая ортогональность функций $\varphi_n(x)$, получаем равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = c_n\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Отсюда

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx} = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (10.50)$$

Числа $c_n$, вычисляемые по формуле (10.50), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$, а ряд (10.49) — рядом Фурье функции $f(x)$ по этой системе.

Если система функций $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормирована, то формула для коэффициентов Фурье приобретает вид

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (10.51)$$

Заметим, что коэффициенты Фурье $c_n$ можно вычислить по формуле (10.50) для любой интегрируемой на $[a, b]$ функции, и каж-

дой такой функции можно поставить в соответствие ее ряд Фурье по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x). \tag{10.52}$$

Условия, при которых в соотношении (10.52) знак соответствия можно заменить знаком равенства, зависят как от свойств функции $f(x)$, так и от свойств ортогональной системы $\{\varphi_n(x)\}$. Некоторые из этих условий будут рассмотрены в дальнейшем.

Если $\varphi_n(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлены Лежандра, то ряд и коэффициенты Фурье функции $f(x)$ имеют вид $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k P_k(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots; \tag{10.53}$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx \tag{10.54}$$

соответственно, где $\|P_n(x)\|^2 = 2/(2n+1)$.

**Пример 2.** Разложить в ряд Фурье по многочленам Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ функцию $f(x) = x^3 - 2x^2$.

□ По формуле (10.54) получаем:

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2) \cdot 1 dx = -2/3;$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2) x dx = 3/5;$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_2(x) dx = \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2) \frac{1}{2} (3x^2 - 1) dx = -4/3;$$

$$c_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_3(x) dx = \frac{7}{2} \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x^2) \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) dx = 2/5.$$

Так как $f(x) = x^3 - 2x^2$ — многочлен третьей степени, то все последующие $(n > 3)$ коэффициенты $c_n$ ряда Фурье равны нулю. Таким образом, искомое разложение в ряд Фурье по многочленам Лежандра имеет вид

$$x^3 - 2x^2 = -\frac{2}{3} P_0(x) + \frac{3}{5} P_1(x) - \frac{4}{3} P_2(x) + \frac{2}{5} P_3(x), \quad x \in [-1, 1].$$

**Минимальное свойство коэффициентов Фурье.** Пусть $f(x)$ — функция с интегрируемым квадратом на отрезке $[a, b]$ и пусть

$$\sigma_n(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) -$$

многочлен $n$-го порядка по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$, где $\alpha_0$, $\alpha_1$, ..., $\alpha_n$ — числа. Величина

$$\delta_n^2 = \int_a^b [f(x) - \sigma_n(x)]^2\,dx = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\right]^2 dx \qquad (10.55)$$

называется *квадратичным уклонением* многочлена $\sigma_n(x)$ от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Возникает вопрос, при каких коэффициентах $\alpha_k$ квадратичное уклонение будет минимальным? Коэффициенты $\alpha_k$, при которых квадратичное уклонение $\delta_n^2$ минимально, называются *коэффициентами наилучшего приближения многочлена* $\sigma_n(x)$ *к функции* $f(x)$. Найдем их. Имеем

$$\sigma_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\right)^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \|\varphi_k\|^2, \qquad (10.56)$$

так как, согласно формуле (10.50), $\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = c_k \|\varphi_k\|^2$ и

$$\int_a^b \varphi_l(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0 \text{ при } i \neq k, \text{ а } \int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx = \|\varphi_k\|^2.$$

Выделяя в правой части равенства (10.56) полный квадрат, находим

$$\delta_n^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 \|\varphi_k\|^2. \qquad (10.57)$$

Так как $\int_a^b f^2(x)\,dx = \text{const}$ и $\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \text{const}$ (они не зависят от $\alpha_k$), то из равенства (10.57) следует, что величина $\delta_n^2$ будет минимальной, если $\alpha_k = c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Таким образом, коэффициентами наилучшего приближения функции $f(x)$ многочленом $\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_n(x)$ являются коэффициенты Фурье этой функции по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$. В этом и заключается *минимальное свойство коэффициента Фурье.*

Из минимального свойства коэффициентов Фурье и формулы (10.57) следует, что минимальное квадратичное уклонение

$$\min \delta_n^2 = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)\right]^2 dx = \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2. \qquad (10.58)$$

**Неравенство Бесселя.** Так как $\delta_n^2 \geqslant 0$, то из формулы (10.58) получаем неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)\,dx, \qquad (10.59)$$

справедливое для любого $n$. Левая часть неравенства (10.59) при возрастании $n$ монотонно возрастает и остается ограниченной числом $\|f\|^2$. Это означает, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2$ сходится и имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{10.60}$$

называемое *неравенством Бесселя.*

Из неравенств (10.57) и (10.58) вытекает, что величина $\min \delta_n^2$ будет стремиться к нулю при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2, \tag{10.61}$$

которое называется *уравнением замкнутости* или *равенством Парсеваля* * — *Стеклова* **.

Если система функций $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормированная, то неравенство Бесселя (10.60) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{10.62}$$

а уравнение замкнутости (10.61) — вид

$$\sum_{k \to 0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2. \tag{10.63}$$

Согласно неравенству (10.62), ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$ сходится, следовательно, $\lim_{k \to \infty} c_k = 0$, т. е. *коэффициенты Фурье функции* $f(x)$ *по ортонормированной системе* $\{\varphi_k(x)\}$ *стремятся к нулю при* $k \to \infty$.

Рассмотрим в качестве примера тригонометрический ряд Фурье (10.15) $2\pi$-периодической функции $f(x)$. В этом случае неравенство Бесселя (10.16) приобретает вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{10.64}$$

В самом деле, согласно неравенству (10.61), имеем

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \|1\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 \|\cos kx\|^2 + b_k^2 \|\sin kx\|^2\right) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$

---

* М. А. Парсеваль (1755—1836) — французский математик.
** В. А. Стеклов (1864—1926) — русский математик.

или

$$\frac{a_0^2}{4}\,2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \pi\left(a_k^2 + b_k^2\right) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

откуда и вытекает справедливость неравенства (10.64).

**Сходимость в среднем (квадратичном).** Пусть

$$S_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x) —$$

$n$-я частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по ортогональной на отрезке $[a, b]$ системе $\{\varphi_k(x)\}$. Ряд Фурье функции $f(x)$ называется *сходящимся* к этой функции *в среднем* на отрезке $[a, b]$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x) - S_n(x)]^2\,dx = 0. \qquad (10.65)$$

Из определения сходимости в среднем равенств (10.58) и (10.61) вытекает следующая

**Теорема 10.3.** Ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c^k\varphi_k(x)$ функции $f(x)$ по ортогональной на отрезке $[a, b]$ системе функций $\{\varphi_k(x)\}$ сходится на этом отрезке в среднем к $f(x)$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство Парсеваля — Стеклова (10.61).

*Замечание.* Из сходимости в среднем ряда Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(x)$ к функции $f(x)$, для которой он составлен, еще не следует, что суммой этого ряда является $f(x)$. В общем случае сумма ряда Фурье не совпадает с $f(x)$. Действительно, если значения двух функций отличаются только в конечном числе точек, то интегралы (10.50), определяющие их коэффициенты Фурье, будут одинаковыми и, следовательно, такие функции имеют один и тот же ряд Фурье.

Введем следующие определения.

Система функций $\{\varphi_k(x)\}$, ортогональных на отрезке $[a, b]$, называется *замкнутой*, если для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом ее ряд Фурье сходится в среднем на $[a, b]$ к самой этой функции.

Система функций $\{\varphi_k(x)\}$, ортогональных на отрезке $[a, b]$, называется *полной*, если нет ни одной, отличной от тождественно равной нулю функции, ортогональной ко всем функциям $\varphi_k(x)$ этой системы на $[a, b]$.

Из определения замкнутости следует, что система ортогональных на $[a, b]$ функций $\{\varphi_k(x)\}$ замкнута тогда и только тогда, когда для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом выполняется равенство Парсеваля — Стеклова (10.61). Условие полноты системы функций $\{\varphi_k(x)\}$ означает, что если некоторая функция $g(x)$ ортогональна всем функциям $\varphi_k(x)$ этой системы, то $g(x) \equiv 0$ в точках непрерывности $g(x)$, $x \in [a, b]$.

**Теорема 10.4.** Если система ортогональных на $[a, b]$ функций $\{\varphi_k(x)\}$ замкнута, то она полна.

□ Пусть функция $f(x)$ ортогональна всем функциям системы $\{\varphi_k(x)\}$ на $[a, b]$, т. е.

$$(f, \varphi_k) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Тогда коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{\varphi_k(x)\}$ равны нулю:

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{10.66}$$

В силу замкнутости системы $\{\varphi_k(x)\}$ на $[a, b]$ для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом выполнено равенство Парсеваля — Стеклова (10.61), откуда в силу равенства (10.66) получаем, что

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2 \Leftrightarrow \int_a^b f^2(x)\,dx = 0.$$

Из этого равенства следует, что функция $f(x)$ тождественно равна нулю в точках непрерывности ее на $[a, b]$. ■

Из доказанной теоремы вытекает, что если из замкнутой системы функций, ортогональных на некотором отрезке, исключить хотя бы одну, то оставшаяся система функций будет уже не замкнутой. Кроме того, из теоремы 10.4 следует, что если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют одинаковые ряды Фурье по данной ортогональной системе $\{\varphi_k(x)\}$, то эти функции совпадают с точностью до значений в конечном числе точек рассматриваемого отрезка $[a, b]$.

**Сходимость в среднем тригонометрического ряда Фурье.** Сформулируем без доказательства следующую теорему.

**Теорема 10.5.** Тригонометрическая система функций (10.4) замкнута.

Теорема 10.5 утверждает, что для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом на $[a, b]$ ее тригонометрический ряд Фурье (10.15) сходится к ней в среднем, т. е. имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\,dx = 0,$$

где

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) —$$

$n$-я частичная сумма ряда Фурье (10.15), которая называется *тригонометрическим многочленом порядка n.*

По теореме 10.4 заключаем, что тригонометрическая система полна; в силу замкнутости ее имеет место равенство Парсеваля — Стеклова

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{10.67}$$

**Пример 3.** Убедившись, что разложение в ряд Фурье нечетной $2\pi$-периодической функции, заданной на интервале $(0, \pi)$ равенством

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}, \text{ имеет вид } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ доказать, что}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□ Поскольку $f(x)$ — нечетная функция, то $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ Применяя теперь равенство Парсеваля — Стеклова (10.61) при $b_n = 1/n$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = -\frac{4}{3\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Ортогональность с весом.** Обобщением понятия ортогональности функций является понятие ортогональности функций с весом.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, а функция $\rho(x)$ — непрерывна и неотрицательна в интервале $(a, b)$, $\rho(x) \not\equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *ортогональными* на отрезке *с весом* $\rho(x)$, если

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, \rho(x)\, dx = 0. \tag{10.68}$$

Функция $\rho(x)$ называется *весовой* или просто *весом*.

Система функций $\{\varphi_k(x)\}$ называется *ортогональной* на отрезке $[a, b]$ *с весом* $\rho(x)$, если

$$\int_a^b \rho(x)\, \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n, \tag{10.69}$$

при этом норма функции определяется равенством (9.109):

$$\|\varphi_k(x)\| = \sqrt{\int_a^b \rho(x)\, \varphi_k^2(x)\, dx}.$$

**Пример 4.** Показать, что *многочлены Чебышева*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{10.70}$$

ортогональны на $(-1, 1)$ с весом $\rho(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

□ Введя подстановку $x = \cos\theta$ и воспользовавшись формулой Эйлера (4.16), ч. II, получим

$$T_n = \cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{(e^{i\theta})^n + (e^{-i\theta})^n}{2} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n}{2} =$$

$$= \frac{(\cos\arccos x + i\sin\arccos x)^n + (\cos\arccos x - i\sin\arccos x)^n}{2}.$$

Так как $\cos\arccos x = x$, $\sin\arccos x = \sqrt{1 - x^2}$, то отсюда для многочленов Чебышева получаем другую запись:

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Из этой формулы, в частности, нетрудно получить, что

$$T_0(x)=1;\ T_1(x)=x;\ T_2(x)=2x^2-1;$$
$$T_3(x)=4x^3-3x;\ T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$

и т. д.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)\,T_m(x)\,\rho(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{\cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left|x=\cos\theta\right|=$$

$$=\int_{0}^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta=\begin{cases}0, & n\neq m;\\ \pi/2, & n=m.\end{cases}$$

Отсюда следует ортогональность многочленов Чебышева на $(-1, 1)$ с весом $\rho(x)=1/\sqrt{1-x^2}$. Из последнего равенства получаем

$$\|T_n(x)\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}T_n^2(x)\,\rho(x)\,dx}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad n=1,\ 2,\ \ldots;$$

$$\|T_0(x)\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x_2}}}=\sqrt{\pi}.$$

**Пример 5.** Как показано в § 10.1, система функций Бесселя $\{J_\nu(\alpha_i x)\}$, $i=1, 2, \ldots$, ортогональна на отрезке $[0, 1]$ с весом $\rho(x)=x$, где $\alpha_i$ — корень функции $J_\nu(x)$, т. е справедливо равенство

$$\int_0^1 xJ_\nu(\alpha_i x)\,J_\nu(\alpha_j x)\,dx=0,\ i\neq j. \tag{10.71}$$

Норма бесселевой функции $J_\nu(\alpha_i x)$, согласно формуле (9.112), равна

$$\|J_\nu(\alpha_i x)\|=\sqrt{\int_0^1 xJ_\nu^2(\alpha_i x)\,dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}J_\nu'(\alpha_i). \tag{10.72}$$

Пусть задана ортогональная на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x)$ система функций $\{\varphi_k(x)\}$. Ряд

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x), \tag{10.73}$$

коэффициенты $c_k$ которого определяются формулами

$$c_k=\frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,f^2(x)\,dx},\quad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{10.74}$$

называется рядом Фурье по ортогональной с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$ системе функций $\{\varphi_k(x)\}$.

**Ряды Фурье — Чебышева.** Рассмотрим систему многочленов Чебышева (10.70). Ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе, согласно формуле (10.73), имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \tag{10.75}$$

где

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) T_k(x)\, dx, \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \tag{10.76}$$

так как

$$\|T_k(x)\| = \sqrt{\pi/2}, \quad k \geqslant 1; \quad T_0(x) = 1, \quad \|T_0(x)\| = \sqrt{\pi}.$$

Ряд (10.75) называется *рядом Фурье — Чебышева.*

Произведем в интеграле (10.76) замену $x = \cos\tau$. Тогда с учетом формулы (10.70) получим

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\tau) \cos\tau d\tau, \quad k \geqslant 1; \\ c_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{10.77}$$

С другой стороны, если рассмотреть ряд Фурье четной функции $F(\theta) = f(\cos\theta)$ по косинусам

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta = f(\cos\theta), \tag{10.78}$$

то легко увидеть, что ряды (10.75) и (10.78) при условии $x = \cos\theta$ почленно тождественны. Действительно, при $x = \cos\theta$ из равенств (10.76) и (10.77) имеем

$$c_k T_k(x) = \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\tau) \cos k\tau d\tau \right) \cos k\theta = a_k \cos k\theta;$$

$$c_0 T_0(x) = \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\tau)\, d\tau \right) 1 = \frac{a_0}{2},$$

где, согласно разложению (10.78),

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\tau) \cos k\tau d\tau, \quad k \geqslant 1; \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos\tau)\, d\tau.$$

Таким образом, для разложения некоторой функции $f(x)$ в ряд Фурье — Чебышева достаточно разложить четную функцию $F(\theta) = f(\cos\theta)$ в ряд Фурье по косинусам. Положив в последнем $\theta = \arccos x$, получим искомый ряд Фурье — Чебышева для функции $f(x)$.

**Пример 6.** Разложить в ряд Фурье — Чебышева функцию $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $|x|\leqslant 1$.

□ Так как замена $x=\cos\theta$ приводит функцию $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ к функции $F(\theta)=|\sin\theta|$, $\theta\in[0, \pi]$, разложим сначала четную функцию $|\sin\theta|$ в ряд по косинусам. Имеем

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos n\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\,\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi(1-n^2)}, & n=2k,\ k=0, 1, \ldots;\\ 0, & n=2k+1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$|\sin\theta|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\theta}{4k^2-1},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

Отсюда при $\theta=\arccos x$ получаем искомый ряд Фурье — Чебышева:

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T_{2k}(x)}{4k^2-1},\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

**Ряды Фурье—Бесселя.** Рассмотрим систему функций Бесселя $\{J_\nu(\alpha_k x)\}$, $k=1, 2, \ldots$, ортогональных на отрезке $[0, 1]$ с весом $\rho(x)=x$. Здесь $\alpha_k$ —$k$-й по счету положительный корень функции $J_\nu(x)$.

Ряд Фурье для функции $f(x)$ по указанной системе функций Бесселя имеет вид

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k J_\nu(\alpha_k x),\tag{10.79}$$

где в соответствии с формулами (10.74) и (10.72) коэффициенты

$$c_k=\frac{2\int_0^1 xf(x)J_\nu(\alpha_k x)\,dx}{\left[J'_\nu(\alpha_k)\right]^2},\quad k\geqslant 1.\tag{10.80}$$

Ряд (10.79) с коэффициентами (10.80) называется *рядом Фурье — Бесселя* для функции $f(x)$.

**Пример 7.** Функцию $f(x)=1$, $x\in[0, 1]$, разложить в ряд Фурье — Бесселя по функциям $J_0(\alpha_k x)$, $k=1, 2, \ldots$

□ По формуле (10.80) находим коэффициенты $c_k$:

$$c_k=\frac{2\int_0^1 xJ_0(\alpha_k x)\,dx}{\left[J'_0(\alpha_k)\right]^2}=\frac{2\int_0^1\alpha_k xJ_0(\alpha_k x)\,d(\alpha_k x)}{\alpha_k^2\left[J'_0(\alpha_k)\right]^2}=\frac{2\int_0^{\alpha_k}zJ_0(z)\,dz}{\alpha_k^2\left[J'_0(\alpha_k)\right]^2}.$$

Вычислим интеграл $\int_0^{\alpha_k}zJ_0(z)\,dz$. Предварительно заметим, что из формулы (9.102) вытекает равенство

$$J'_0(z)=J_{-1}(z)=-J_1(z).\tag{10.81}$$

Далее, так как

$$\frac{d}{dz}\left[zJ_1(z)\right] = zJ_1'(z) + J_1(z) = zJ_0(z)$$

согласно формуле (9.102), то отсюда интегрированием находим

$$\int_0^{\alpha_k} zJ_0(z) = zJ_1(z)\Big|_0^{\alpha_k} = \alpha_k J_1(\alpha_k). \tag{10.82}$$

В силу равенств (10.81) и (10.82) имеем

$$c_k = \frac{2\alpha_k J_1(\alpha_k)}{\alpha_k^2 J_1^2(\alpha_k)} = \frac{2}{\alpha_k J_1(\alpha_k)}.$$

Отсюда окончательно искомый ряд Фурье — Бесселя имеет вид

$$1 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k x)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)} = 2\left[\frac{J_0(\alpha_1 x)}{\alpha_1 J_1(\alpha_1)} + \frac{J_0(\alpha_2 x)}{\alpha_2 J_1(\alpha_2)} + \ldots\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

**Задачи и упражнения**

1. Показать, что система многочленов

$$U_n(x) = \frac{\sin\left[(n+1)\arccos x\right]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ортогональна на интервале $(-1, 1)$ с весом $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Доказать, что ряд Фурье для функции $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$ по системе многочленов Лежандра имеет вид

$$|x| = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)!}{(k-1)!\,(k+1)!} \frac{(4k+1)}{2^{2k}} P_{2k}(x).$$

3. Показать, что ряд Фурье — Чебышева для функции $\ln(1+x)$, $-1 < x \leqslant 1$, имеет вид

$$\ln(1+x) = -\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} T_k(x).$$

4. Показать, что коэффициенты ряда Фурье — Бесселя для функции $f(x) = 1-x$ на отрезке $[0, 1]$ по системе функций $\{J_0(\alpha_k x)\}$ вычисляются по формуле

$$c_k = \frac{2}{\alpha_k^3 J_1^2(\alpha_k)} \int_0^{\alpha_k} J_0(z)\, dz, \quad k = 1, 2, \ldots$$

### 10.3. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

**Интеграл Фурье.** Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой* на всей действительной оси $X$, если сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$, т. е. если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = M < +\infty. \tag{10.83}$$

Имеет место

**Теорема 10.6** (Фурье). Пусть функция $f(x)$ : 1) определена на всей числовой оси, 2) является кусочно-гладкой в каждом конечном промежутке, 3) абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Тогда имеет место формула

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+z)\frac{\sin nz}{z}\,dz=\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)]. \quad (10.84)$$

Условия 1 — 3 теоремы 10.6 называются *условиями Дирихле.* Вывод формулы (10.84) опускается.

Произведем в интеграле в левой части равенства (10.84) замену $x+z=t$. Тогда получим *формулу Фурье*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \quad (10.85)$$

Так как

$$\frac{\sin n(t-x)}{t-x}=\int_0^n \cos\omega(t-x)\,d\omega, \quad (10.86)$$

то формула (10.85) с учетом равенства (10.86) приводится к виду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\int_0^n \cos\omega(t-x)\,d\omega\right]dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_0^{\infty}\cos\omega(t-x)d\omega\right)dt. \quad (10.87)$$

В силу очевидного неравенства $|f(t)\cos\omega(t-x)|\leqslant|f(t)|$ и выполнения условия (10.83) на основании теоремы 7.7, ч. II, существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt,$$

равномерно сходящийся по $\omega\in[0,+\infty)$. Поэтому на основании формулы (7.33), ч. II, справедливо равенство

$$\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt\right)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_0^{\infty}\cos\omega(t-x)\,d\omega\right)dt. \quad (10.88)$$

Из равенств (10.87) и (10.88) получаем формулу *двойного интеграла* Фурье функции $f(x)$:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \quad (10.89)$$

Таким образом, если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяет условиям Дирихле, то для нее справедлива формула (10.89). В частности, если $f(x)$ непрерывна в точке $x$, то

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \quad (10.90)$$

**Пример 1.** Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|>1;\\ 1/2, & |x|=1.\end{cases} \tag{10.91}$$

□ Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx=\int\limits_{-1}^{1}1dx=2<+\infty$, то условие (10.83) для функции (10.91) выполнено. Следовательно, ее можно представить интегралом Фурье (10.90). Имеем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-1}^{1}\cos\omega(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\,\frac{\sin\omega(t-x)}{\omega}\Bigg|_{t=-1}^{t=1}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x d\omega. \tag{10.92}$$

Из формулы (10.92) при $x=0$ получаем равенство $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\pi/2$.

**Косинус- и синус-преобразования Фурье.** Обратимся к интегралу Фурье (10.90) и преобразуем его к виду

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)[\cos\omega t\cos\omega x+\sin\omega t\sin\omega x]\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\times$$

$$\times\cos\omega t dt\Bigg)\cos\omega x d\omega+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt\Bigg)\sin\omega x d\omega.$$

Введем обозначение

$$a(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt,\quad b(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t dt. \tag{10.93}$$

Тогда

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}[a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x]\,d\omega. \tag{10.94}$$

Формула (10.94) также называется *интегралом Фурье*. Интегралы (10.93) понимаются в смысле главного значения. Они похожи на коэффициенты $a_n$ и $b_n$ ряда Фурье функции $f(x)$. Интеграл же (10.94) по форме записи сходен с рядом Фурье.

Пусть $f(x)$ — четная функция, удовлетворяющая условиям представления ее интегралом Фурье. Тогда в смысле главного значения

$$a(\omega)=2\int\limits_{0}^{\infty}f(t)\cos\omega t dt,\quad b(\omega)=0, \tag{10.95}$$

так как $f(t)\cos\omega t$ четная, а $f(t)\sin\omega t$ — нечетная по $t$ функции.

Следовательно, интеграл Фурье (10.94) в этом случае принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega. \tag{10.96}$$

Аналогично, если $f(x)$ — нечетная функция, то

$$b(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad a(\omega) = 0, \tag{10.97}$$

и тогда

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega. \tag{10.98}$$

Формулы (10.96) и (10.98) называются *интегралами Фурье для четной и нечетной функций* соответственно, а формулы (10.95) и (10.97) — *косинус- и синус-преобразованиями Фурье* соответственно.

Интеграл (10.90) и частные случаи (10.96) и (10.98) характеризуют разложение непериодической функции $f(x)$ на сумму гармонических составляющих с частотами $\omega$, непрерывно изменяющимися от 0 до $\infty$.

Для симметризации записи введем обозначения

$$\widetilde{a}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt; \tag{10.99}$$

$$\widetilde{b}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \tag{10.100}$$

Тогда $a(\omega) = 2\pi \widetilde{a}(\omega)$, $b(\omega) = 2\pi \widetilde{b}(\omega)$, и вместо формул (10.96) и (10.98) получим:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widetilde{a}(\omega) \cos \omega x d\omega; \tag{10.101}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widetilde{b}(\omega) \sin \omega x d\omega. \tag{10.102}$$

Функции $\widetilde{a}(\omega)$ и $\widetilde{b}(\omega)$ также называются косинус- и синус-преобразованиями Фурье соответственно.

**Пример 2.** Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geqslant 0, \quad \alpha > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

□ Нетрудно убедиться, что данная функция удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости. По формулам (10.99) и (10.100) имеем:

$$\widetilde{a}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\cos\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2};$$

$$\widetilde{b}(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\sin\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Тогда $f(x)$ можно представить в виде

$$e^{-\alpha x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\widetilde{a}(\omega)\cos\omega x d\omega=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega,\quad x\geqslant 0,$$

или

$$e^{-\alpha x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\widetilde{b}(\omega)\sin\omega x d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega,\quad x\geqslant 0.$$

**Комплексная форма интеграла Фурье.** Рассмотрим интеграл Фурье (10.90). Так как интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt$ является четной функцией аргумента $\omega$, то в смысле главного значения равенство (10.90) можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt. \qquad (10.103)$$

Аналогично интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega(t-x)dt$ является нечетной функцией $\omega$, и в смысле главного значения

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega(t-x)dt=0. \qquad (10.104)$$

Вычитая из равенства (10.103) равенство (10.104), умноженное на $i$, с учетом формул Эйлера получим

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)[\cos\omega(t-x)-i\sin\omega(t-x)]dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega(t-x)}dt.$$

Формула

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega(t-x)}dt \qquad (10.105)$$

называется *комплексной формой интеграла Фурье*. Заметим, что если в точке $x$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода, то формула (10.105) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega(t-x)}dt = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}. \quad (10.106)$$

**Преобразование Фурье.** Перепишем интеграл Фурье (10.105) в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt.$$

Обозначим

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt, \quad (10.107)$$

тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega x}d\omega. \quad (10.108)$$

Функция $F(i\omega)$ называется *преобразованием Фурье* или *спектральной характеристикой* функции $f(x)$. Функция $f(x)$, определяемая равенством (10.108), называется *обратным преобразованием Фурье*; функция $e^{i\omega x}$ — *комплексной гармоникой*. Очевидно, спектральная характеристика $F(i\omega)$ является комплексной амплитудой гармоники $e^{i\omega x}$.

Таким образом, интегральное представление (10.108) функции $f(x)$ можно понимать как представление в виде бесконечной непрерывной системы колебаний $e^{i\omega x}$ частоты $\omega$ и амплитуды $F(i\omega)$. Функция $|F(i\omega)|$ называется *амплитудным частотным спектром* функции $f(x)$.

*Замечание 1.* Если функция $f$ в точке $x$ имеет разрыв первого рода, то равенство (10.108) должно быть записано в виде

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega x}d\omega. \quad (10.109)$$

*Замечание 2.* Если равенство (10.104) умножить на $i$ и сложить с равенством (10.103), получим другую комплексную форму интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega(t-x)}dt,$$

из которой следует, что прямое преобразование Фурье имеет вид

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}dt, \quad (10.110)$$

а обратное — вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(i\omega)\,e^{-i\omega x}d\omega. \qquad (10.111)$$

Дальнейшие рассуждения будем вести применительно к прямому и обратному преобразованиям Фурье (10.107) и (10.108) соответственно и обозначать

$$F(i\omega)=\mathbf{F}\{f(x)\},\ f(x)=\mathbf{F}^{-1}\{Fi\omega)\}.$$

*Замечание 3.* Если для функции $f(x)$ существует $F(i\omega)=\mathbf{F}\{f(x)\}$, то будем говорить, что функция $f(x)$ преобразуема по Фурье.

**Пример 3.** Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\alpha x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0\end{cases}$$

при $\alpha>0$ и построить график ее амплитудно-частотного спектра.

□ По формуле (10.107) имеем

$$F(i\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}dt=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}dt=\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)}\Bigg|_0^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{\alpha+i\omega}\lim_{t\to\infty}e^{-(\alpha+i\omega)t}+\frac{1}{\alpha+i\omega}.$$

Так как $|e^{-(\alpha+i\omega)t}|=|e^{-\alpha t}|\cdot|e^{-i\omega t}|=e^{-\alpha t}$, то $\lim\limits_{t\to\infty}|e^{-(\alpha+i\omega)t}|=0$. В таком случае $F(i\omega)=\dfrac{1}{\alpha+i\omega}$. Отсюда $|F(i\omega)|=\dfrac{1}{\alpha^2+\omega^2}$. График $|F(i\omega)|$ изображен на рис. 10.11.

Если функция $f(x)\equiv 0$ при $x<0$, то для нее прямое преобразование Фурье есть

$$F(i\omega)=\int\limits_{0}^{\infty}f(x)\,e^{-i\omega x}dx. \qquad (10.112)$$

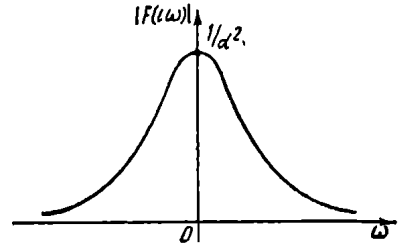



Рис. 10.11

Функция $F(i\omega)$, определяемая равенством (10.112), называется *односторонним преобразованием Фурье* функции $f(x)$. Обратное преобразование Фурье в этом случае имеет тот же вид (10.108).

**Свойства преобразования Фурье.** Установим сначала некоторые дополнительные сведения о прямом и обратном преобразовании Фурье. Заметим, что интегралы (10.107) и (10.108) понимаются в смысле главного значения. Покажем, что интеграл (10.107) сходится абсолютно и равномерно по $\omega$. В самом деле, с учетом равенства (10.83) имеем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\omega x}dx\right|\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)\,e^{-i\omega x}|\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx=M. \qquad (10.113)$$

Так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)\, e^{-i\omega x}|\, dx$ сходится, то интеграл (10.107) сходится абсолютно, а из оценки (10.113) по признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла (10.107) относительно $\omega$.

Если же интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, d\omega$ сходится абсолютно, то интеграл (10.108) сходится равномерно относительно $x$. Это следует из оценки

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\, e^{i\omega x} d\omega\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)\, e^{i\omega x}|\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|\, d\omega$$

и сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|\, d\omega$.

Сформулируем и докажем теперь следующие свойства преобразования Фурье.

1° (линейность преобразования Фурье). Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ преобразуемы по Фурье и $\mathbf{F}\{f_1(x)\} = F_1(i\omega)$, $\mathbf{F}\{f_2(x)\} = F_2(i\omega)$, ..., $\mathbf{F}\{f_n(x)\} = F_n(i\omega)$, то для любых чисел $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ справедливы равенства

$$\mathbf{F}\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)\right\} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(i\omega);$$

$$\mathbf{F}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k(i\omega)\right\} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x).$$

Справедливость этих формул следует из линейных свойств интегралов (10.107) и (10.108).

Докажем теперь вспомогательную теорему.

**Теорема 10.13.** Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, такая, что $f(x)$ и $f'(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси. Тогда $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

□ Так как $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\, dt$ и существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt$, то $f(x)$ имеет пределы при $x\to\pm\infty$. Покажем, что эти пределы равны нулю. В самом деле, по условию интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ существует и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{0} |f(x)|\, dx + \int_{0}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Поэтому достаточно рассмотреть хотя бы один из интегралов справа, например второй.

Допустим, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \neq 0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B > 0$, такое, что для всех $x \geqslant B$ выполняется не-

равенство $|f(x)-a|<\varepsilon$. Отсюда при $\varepsilon=|a|/2$ получим неравенство $|f(x)|>|a|/2$, $\forall\ x\geqslant B$.
Тогда

$$\int_0^{\infty}|f(x)|\,dx=\int_0^{B}|f(x)|\,dx+\int_B^{\infty}|f(x)|\,dx>\int_0^{\infty}|f(x)|\,dx+\int_B^{\infty}\frac{|a|}{2}\,dx.$$

В силу неограниченности интеграла $\int_B^{\infty}\frac{|a|}{2}\,dx$ интеграл $\int_0^{\infty}|f(x)|\,dx$ также неограничен, а, значит, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ расходится, что противоречит условиям теоремы. Это противоречие и доказывает, что $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Аналогично показывается, что $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. ■

2° (преобразование Фурье производной). Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ преобразуемы по Фурье и $\mathbf{F}\{f(x)\}=F(i\omega)$, то

$$\mathbf{F}\{f'(x)\}=i\omega F(i\omega).$$

□ Согласно формуле (10.107), имеем $\mathbf{F}\{f'(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\,e^{-i\omega x}dx$. Интегрируя по частям, получаем

$$\mathbf{F}\{f'(x)\}=f(x)\,e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+i\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\omega x}dx. \qquad (10.114)$$

Так как $f(x)$ преобразуема по Фурье, то на основании теоремы 10.13 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, откуда $f(x)\,e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$.
Таким образом,

$$\mathbf{F}\{f'(x)\}=i\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\omega x}dx=i\omega F(i\omega),$$

согласно формулам (10.114) и (10.107). ■

*Следствие.* Если производная $f^{(k)}(x)$ преобразуема по Фурье, то

$$\mathbf{F}\{f^{(k)}(x)\}=(i\omega)^kF(i\omega),\ k=1,2,\ldots \qquad (10.115)$$

Равенство (10.115) доказывается по индукции.

Для одностороннего преобразования Фурье имеет место формула

$$\mathbf{F}\{f'(x)\}=i\omega F(i\omega)-f(+0), \qquad (10.116)$$

где $f(+0)=\lim\limits_{x\to+0}f(x)$. Ее справедливость следует из равенства (10.114), в которой нижний предел есть $+0$.

3° (преобразование Фурье интеграла). Пусть функция $f(x)$ преобразуема по Фурье и $F(i\omega)$ — ее спектральная характеристика. Тогда если $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=0$, то

$$\mathbf{F}\left\{\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right\} = \frac{F(i\omega)}{i\omega}. \qquad (10.117)$$

□ По формуле (10.107) имеем

$$\mathbf{F}\left\{\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)e^{-i\omega x}dx.$$

Вычислим интеграл в правой части этого равенства по частям:

$$\mathbf{F}\left\{\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right\} = -\frac{e^{-i\omega x}}{i\omega}\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dt\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx.$$

Внеинтегральный член справа в этом равенстве равен нулю по условию теоремы. Таким образом,

$$\mathbf{F}\left\{\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx = \frac{F(i\omega)}{i\omega}. \blacksquare$$

4° (преобразование Фурье смещенной функции). Если функция $f(x)$ преобразуема по Фурье и $F\{f(x)\}=F(i\omega)$, то для *смещенной функции* $f(x-a)$ ($a$ — неотрицательное число) ее спектральная характеристика

$$\mathbf{F}\{f(x-a)\} = e^{-i\omega a}F(i\omega). \qquad (10.118)$$

□ Исходя из формулы (10.107), имеем

$$\mathbf{F}\{f(x-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\,e^{-i\omega x}dx = |x-a=t| = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega(t+a)}dt =$$

$$= e^{-i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega a}F(i\omega). \blacksquare$$

Аналогично доказывается равенство ($a\geqslant 0$)

$$\mathbf{F}\{f(x+a)\} = e^{i\omega a}F(i\omega). \qquad (10.119)$$

5° (смещение спектральной характеристики). Если функция $f(x)$ преобразуема по Фурье и $\mathbf{F}\{f(x)\}=F(i\omega)$, то для любого неотрицательного числа $a$

$$\mathbf{F}\{e^{-iax}f(x)\} = F(i(\omega+a)). \qquad (10.120)$$

□ По формуле преобразования Фурье имеем

$$\mathbf{F}\{e^{-iax}f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax}f(x)\,e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i(\omega+a)x}dx = F(i(\omega+a)). \blacksquare$$

Аналогично доказывается формула

$$\mathbf{F}\{e^{iax}f(x)\} = F(i(\omega-a)). \qquad (10.121)$$

Следующее свойство характеризует спектральную характеристику функции в результате растяжения или сжатия графика ее вдоль оси $X$.

6°. Если функция $f(x)$ преобразуема по Фурье и $\mathbf{F}\{f(x)\}=F(i\omega)$, то для любого положительного числа $a$

$$\mathbf{F}\{f(x/a)\}=aF(ia\omega). \tag{10.122}$$

□ По формуле преобразования Фурье имеем

$$\mathbf{F}\left\{f\left(\frac{x}{a}\right)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right)e^{-i\omega x}dx=\left|\begin{matrix}x=at\\dx=adt\end{matrix}\right|=a\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i(\omega a)t}dt=$$

$$=aF(ia\omega). \blacksquare$$

**Преобразование Фурье свертки функций.** *Сверткой двух функций* $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенных для всех $x\in\mathbf{R}$, называется новая функция

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau. \tag{10.123}$$

Свертка функций обладает следующими свойствами:

а) $(\alpha f_1+\beta f_2)*f_3=\alpha(f_1*f_3)+\beta(f_2*f_3)$ (*линейность*);

б) $f_1*f_2=f_2*f_1$ (*коммутативность*);

в) $(f_1*f_2)*f_3=f_1*(f_2*f_3)$ (*ассоциативность*).

Докажем эти свойства.

а) □ $(\alpha f_1+\beta f_2)*f_3=\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha f_1(x-\tau)+\beta f_2(x-\tau)]f_3(\tau)\,d\tau=$

$$=\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\tau)\,f_3(\tau)\,d\tau+\beta\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\tau)\,f_3(\tau)d\tau=\alpha(f_1*f_3)+\beta(f_2*f_3). \blacksquare$$

б) □ Имеем

$$f_1*f_2=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau=\left|\begin{matrix}x-\tau=t\\d\tau=-dt\end{matrix}\right|=-\int_{\infty}^{-\infty} f_1(t)\,f_2(x-t)\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t)\,f_1(t)\,dt=f_2*f_1. \blacksquare$$

в) □ Обозначим $g=f_1*f_2$ и $h=f_2*f_3$. Данное свойство будет доказано, если $g*f_3=f_1*h$. Действительно,

$$g*f_3=\int_{-\infty}^{\infty} g(x-\tau)\,f_3(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-\tau-s)\,f_2(s)\,ds\right)f_3(\tau)\,d\tau=$$

$$=|\tau+s=u,\ s=u-\tau,\ ds=du|=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u)\,f_2(u-\tau)\,du\right)\times$$

$$\times f_3(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_2(u-\tau)\,f_3(\tau)\,d\tau\right)du=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-u)\times$$

$$\times h(u)\,du=f_1*h. \blacksquare$$

Если $f_1(x) \equiv 0$ и $f_2(x) \equiv 0$ при $x < 0$, то $f_2(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$, $f_1(-\tau) \equiv 0$ при $\tau > 0$ и $f_1(x-\tau) \equiv 0$ при $\tau > x$. В этом случае свертка $f_1 * f_2$ определяется равенством

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x f_1(x-\tau) f_2(\tau)\, d\tau. \qquad (10.124)$$

Следующая теорема дает возможность найти Фурье-преобразование свертки двух функций.

**Теорема 10.14.** Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ преобразуемы по Фурье, причем $\mathbf{F}\{f_1(x)\} = F_1(i\omega)$ и $\mathbf{F}\{f_2(x)\} = F_2(i\omega)$, то спектральная характеристика свертки определяется равенством

$$\mathbf{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = F_1(i\omega)\, F_2(i\omega). \qquad (10.125)$$

□ По формуле преобразования Фурье имеем

$$\mathbf{F}\{f_1 * f_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\tau) f_1(\tau)\, d\tau \right) e^{-i\omega x} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\tau)\, e^{-i\omega x} dx \right) d\tau.$$

Во внутреннем интеграле в правой части этого равенства сделаем замену $x - \tau = s \Rightarrow x = \tau + s$, $dx = ds$. Тогда

$$\mathbf{F}\{f_1 * f_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_2(s)\, e^{-i\omega(s+\tau)} ds \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} f_2(s) e^{-i\omega s} ds = F_1(i\omega)\, F_2(i\omega). \blacksquare$$

Отметим, что аналогичная теорема имеет место и для свертки (10.124). В этом случае

$$\mathbf{F}\left\{ \int_0^x f_1(x-\tau) f_2(\tau)\, d\tau \right\} = F_1(i\omega)\, F_2(i\omega). \qquad (10.126)$$

**Пример 4.** Найти обратное преобразование Фурье для функции

$$F(i\omega) = \frac{1}{(\alpha + i\omega)(\beta + i\omega)}, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

□ Обозначим $F_1(i\omega) = 1/(\alpha + i\omega)$, $F_2(i\omega) = 1/(\beta + i\omega)$. Согласно примеру 3 имеем $f_1(x) = \mathbf{F}^{-1}\{1/(\alpha + i\omega)\} = e^{-\alpha x}$, $x > 0$; $f_2(x) = \mathbf{F}^{-1}\{1/(\beta + i\omega)\} = e^{-\beta x}$, $x > 0$. Тогда на основании теоремы 10.14 и формулы (10.126) получаем

$$\mathbf{F}^{-1}\{F_1(i\omega)\, F_2(i\omega)\} = f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x e^{-\alpha(x-\tau)} e^{-\beta\tau} d\tau = e^{-\alpha x} \int_0^x e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau =$$

$$= e^{-\alpha x} \frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha - \beta}\Big|_0^x = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha - \beta} [e^{(\alpha-\beta)x} - 1] = \frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}}{\alpha - \beta}.$$

Из формулы (10.125) следует

$$f_1(x) * f_2(x) = \mathbf{F}^{-1}\{F_1(i\omega)\,F_2(i\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega)\,F_2(i\omega)\,e^{i\omega x}d\omega. \tag{10.127}$$

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ абсолютно интегрируемы для всех $x\in\mathbf{R}$ и пусть $\mathbf{F}\{f_1(x)\}=F_1(i\omega)$ и $\mathbf{F}\{f_2(x)\}=F_2(i\omega)$. *Сверткой функций* $F_1(i\omega)$ и $F_2(i\omega)$ называется функция

$$F(i\omega) = F_1(i\omega) * F_2(i\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1[i(\omega-u)]\,F_2(iu)\,du. \tag{10.128}$$

Справедлива следующая

**Теорема 10.15.** Если $\mathbf{F}\{f_1(x)\}=F_1(i\omega)$ и $\mathbf{F}\{f_2(x)\}=F_2(i\omega)$, то

$$\mathbf{F}^{-1}\{F_1(i\omega) * F_2(i\omega)\} = 2\pi f_1(x)\,f_2(x). \tag{10.129}$$

□ Согласно равенствам (10.108) и (10.128), имеем

$$\mathbf{F}^{-1}\{F_1 * F_2\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1[i(\omega-u)\,F_2(iu)\,du\right)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_2(iu)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1[i(\omega-u)\,e^{i\omega x}d\omega\right)du.$$

Во внутреннем интеграле в правой части этого равенства сделаем замену $\omega-u=v$, $d\omega=dv$. Тогда

$$\mathbf{F}^{-1}(F_1 * F_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_2(iu)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(iv)\,e^{i(u+v)x}dv\right)du = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_2(iu)\,e^{iux}du\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(iv)\,e^{ivx}dv\right) = 2\pi f_1(x)\,f_2(x).\ \blacksquare$$

Доказанная теорема позволяет найти Фурье-преобразование от произведения двух функций. В самом деле, из формулы (10.129) следует, что

$$F_1(i\omega) * F_2(i\omega) = 2\pi\mathbf{F}\{f_1(x)\,f_2(x)\},$$

т. е.

$$\mathbf{F}\{f_1(x)\,f_2(x)\} = \frac{1}{2\pi}[F_1(i\omega) * F_2(i\omega)]. \tag{10.130}$$

**Теорема Парсеваля — Планшереля*.** Важную роль в теории преобразования Фурье играет следующая

* М. Планшерель (1885—1967) — швейцарский математик.

**Теорема 10.16** (Парсеваля — Планшереля). Если существуют интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_1(x)|^2\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_2(x)|^2\,dx$ и $\mathbf{F}\{f_1(x)\}=F_1(i\omega)$, $\mathbf{F}_2\{f_2(x)\}=F_2(i\omega)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f_1(x)}\,f_2(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{F_1(i\omega)}\,F_2(i\omega)\,d\omega. \tag{10.131}$$

□Напомним, что черта над выражением означает переход к комплексно-сопряженному выражению. Обозначим $g(x)=\overline{f_1(-x)}$, тогда $\overline{f_1(x)}=g(-x)=g(0-x)$. В этих обозначениях

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f_1(x)}\,f_2(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(0-x)\,f_2(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(0-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau=$$

$$=g(0)*f_2(0) \tag{10.132}$$

на основании формулы (10.123). Но в силу соотношения (10.127)

$$g(0)*f_2(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(i\omega)\,F_2(i\omega)\,e^{i\omega x}d\omega\Big|_{x=0}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(i\omega)\,F_2(i\omega)\,d\omega. \tag{10.133}$$

Здесь

$$G(i\omega)=\mathbf{F}\{g(x)\}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)\,e^{-i\omega x}dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f_1(-x)}\,e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f_1(-x)\,e^{i\omega x}}dx=\overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(-x)\,e^{i\omega x}dx}=|x=-x_1|=$$

$$=\overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_1(x_1)\,e^{-i\omega x_1}dx_1}=\overline{\mathbf{F}\{f_1(x)\}}=\overline{F(i\omega)}$$

на основании свойств комплексно-сопряженных выражений и интегралов от них. Из этого равенства, соотношений (10.132) и (10.133) и вытекает формула (10.131).■

В частности, если $f_1(x)=f_2(x)$, то из нее получаем формулу Парсеваля — Планшереля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(i\omega)|^2\,d\omega, \tag{10.134}$$

являющуюся аналогом формулы Парсеваля (10.67) в теории рядов Фурье.

**Приложение преобразования Фурье к решению дифференциальных уравнений.** Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение $n$-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

в котором $f(x)$ и $y=y(x)$ абсолютно интегрируемы на всей число-

вой оси функции. Перейдем в этом уравнении к преобразованию Фурье. Считая, что существуют преобразования $\mathbf{F}\{f(x)\}=F(i\omega)$ и $\mathbf{F}\{y(x)\}=Y(i\omega)$, согласно формуле (10.115), получаем

$$(i\omega)^n Y(i\omega)+a_1(i\omega)^{n-1}Y(i\omega)+\ldots+a_{n-1}(i\omega)Y(i\omega)+$$
$$+a^nY(i\omega)=F(i\omega)$$

или

$$[(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(i\omega)+a_n]Y(i\omega)=F(i\omega).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение преобразовалось в алгебраическое уравнение первой степени относительно неизвестного преобразования Фурье $Y(i\omega)$. Отношение $Y(i\omega)/F(i\omega)$ называется *передаточной функцией* и обозначается $H(i\omega)$. Эта функция играет большую роль в теории электрических цепей, автоматического управления и других технических приложениях. Таким образом, имеем

$$H(i\omega)=Y(i\omega)/F(i\omega)=[(i\omega)^n+a_1(i\omega)^{n-1}+\ldots+a_n]^{-1}, \qquad (10.135)$$

откуда

$$Y(i\omega)=H(i\omega)F(i\omega)=F(i\omega)/[(i\omega)^n+a_1(i\omega^{n-1}+\ldots+a_n]. \qquad (10.136)$$

Функция $Y(i\omega)$ является преобразованием Фурье решения $y(x)$ дифференциального уравнения. Воспользовавшись теперь обратным преобразованием Фурье, найдем это решение, т. е. $y(x)=\mathbf{F}^{-1}\{Y(i\omega)\}$.

Таким образом, дифференциальное уравнение $y^n+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x)$ формально решено. Однако применение преобразования Фурье к решению этого уравнения ограничено в силу того, что частные решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами содержат слагаемые вида $e^{\alpha x}$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ $(\alpha>0)$ и т. д., которые не являются абсолютно интегрируемыми функциями на всей числовой оси, а значит, не преобразуемыми по Фурье.

**Пример 5.** Решить уравнение $y'+ay=f(x)$, где

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\alpha x}, & x\geqslant 0,\ \alpha>0,\ \alpha\neq a,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

□ Так как $\mathbf{F}\{f(x)\}=1/(\alpha+i\omega)$ (см. пример 3), то по формуле (10.136) имеем

$$Y(i\omega)=\frac{1}{(\alpha+i\omega)(i\omega+a)}=\frac{1}{a-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha+i\omega}-\frac{1}{a+i\omega}\right).$$

Отсюда

$$y(x)=\mathbf{F}^{-1}\{Y(i\omega)\}=\begin{cases}\dfrac{1}{a-\alpha}(e^{-\alpha x}-e^{-ax}), & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

**Задачи и упражнения**

1. Представить интегралом Фурье функции:

а) $f(x)=\begin{cases}\sin nx, & |x|\leqslant\pi;\\ 0, & |x|>\pi;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

2. Написать интеграл Фурье в комплексной форме, а затем в действительной рме для функции $f(x)=e^{-a|x|}$, $a>0$.

3. Найти амплитудный частотный спектр функции

$$\begin{cases} h\left(1+\dfrac{2x}{\tau}\right), & -\tau/2 \leqslant x \leqslant 0; \\ 0, & |x|>\tau/2; \\ h\left(1-\dfrac{2x}{\tau}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \tau/2. \end{cases}$$

4. Доказать свойство свертки:

$$e^{\alpha x}(f_1(x) * f_2(x)) = e^{\alpha x} f_1(x) * e^{\alpha x} f_2(x).$$

5. Доказать, что если функции $f_1$ и $f_2$ абсолютно интегрируемы на $\mathbf{R}$, то и ертка $f_1 * f_2$ интегрируема на $\mathbf{R}$.

6. Доказать, что если $f(x)$ — четная на всей числовой оси функция, то ее реобразование Фурье есть действительная функция.

## 10.4. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

**Пространство со скалярным произведением.** Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^3$. Вектором, или элементом, $\mathbf{R}^3$ служит упорядоченная тройка $= (x_1, x_2, x_3)^T$. Норма, или длина, вектора в $\mathbf{R}^3$ задается выражением $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Если базис пространства $\mathbf{R}^3$ ортонормирован, то скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, и $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ определяется равенством $(x, y) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$. В связи с этим норма вектора $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ выражается через скалярное произведение следующим образом: $\|x\|^2 = (x, x) \Rightarrow \|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Кроме того, угол между векторами $x$ и $y$ можно найти из уравнения $(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos\theta$, т. е. $\cos\theta = (x, y)/\|x\| \cdot \|y\|$. В частности, векторы $x$ и $y$ называются *ортогональными* (перпендикулярными), если $(x, y) = 0$, и *коллинеарными*, если $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Обобщая эти идеи, вводим пространство $\mathbf{R}^n$, элементами, или векторами, которого являются упорядоченные последовательности $n$ чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Скалярное произведение $(x, y)$ двух векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ из $\mathbf{R}^n$ определяется равенством $(x, y) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_n \cdot y_n$, а норма вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ —соотношением $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Ортогональность векторов $x$ и $y$ из $\mathbf{R}^n$ определяется равенством $(x, y) = 0$, а угол $\theta$ между векторами $x$ и $y$ — формулой $\cos\theta = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$.

В математическом анализе рассматриваются пространства функций, которые, как правило, являются бесконечномерными. Например, пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ — бесконечномерное. Действительно, функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы при любом $n$ (см. пример 3 § 1.6, ч. I). Аналогично функции $1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx$ линейно независимы при любом $n$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Важным понятием теории конечномерных пространств является скалярное произведение. Если в бесконечномерном пространстве можно ввести скалярное произведение, то это приводит к предгиль-

бертовому пространству, являющемуся обобщением $n$-мерного евклидового пространства для $n=\infty$.

Пусть $V$ — линейное пространство. Правило, ставящее в соответствие каждой паре элементов $x$ и $y$ из $V$ некоторое число, называется *скалярным произведением*, если выполнены следующие условия (аксиомы скалярного произведения):

а) $(x, y)=(y, x)$, $\forall x, y \in V$ *(коммутативность)*;

б) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$, $\forall x, y, z \in V$ *(дистрибутивность)*;

в) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$;

г) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Используя аксиому «б», найдем, что если $x=0$ или $y=0$, то $(x, y)=0$. В самом деле, $(0, x)=(0+0, x)=2(0, x)$, откуда $(0, x)=(x, 0)=0$, $\forall x \in V$.

Линейное пространство $V$ с введенным в нем скалярным произведением называется *предгильбертовым* или *пространством со скалярным произведением*. В этом пространстве, как и в $\mathbf{R}^n$, справедливо неравенство Коши — Буняковского

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}, \quad \forall x, y \in V, \tag{10.137}$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x=\lambda y$, где $\lambda \in \mathbf{R}$.

В пространстве $V$ определим норму элемента $x$ по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{10.138}$$

Тогда неравенство Коши — Буняковского (10.137) примет вид

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{10.139}$$

Аналогично, как и в $\mathbf{R}^n$, доказывается, что норма удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ \|x\| \geqslant 0,\ \forall x \in V, \text{ причем } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;\\ &2)\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,\ \forall x,\ y \in V;\\ &3)\ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,\ \forall x \in V,\ \forall \alpha \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{10.140}$$

Пусть элементы $x$ и $y$ из $V$ отличны от нуля. Тогда из неравенства (10.139) следует, что $-1 \leqslant \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leqslant 1$. Отсюда вытекает, что существует угол $\theta \in [0, \pi]$, такой, что

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \tag{10.141}$$

Этот угол, по определению, называется *углом между элементами* (векторами) $x$ и $y$ из $V$.

**Примеры пространств со скалярным произведением.** Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров пространств со скалярным произведением.

**Пример 1.** Векторное пространство $\mathbf{R}^3$ и его обобщение — пространство $\mathbf{R}^n$.

**Пример 2.** Пусть дано множество числовых последовательностей $x = \{x_n\}$, таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Обозначим это множество через $l_2$. Если $x = \{x_n\}$ и $y =$

— элементы множества $l_2$, то их сумма $x+y=\{x_n+y_n\}$ тоже принад-
$l_2$. В самом деле, из неравенства $|x_n y_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(x_n^2+y_n^2\right)$ и сходимости ря-
$x_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$. Отсюда вытекает сходи-
ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^2+2x_n y_n+y_n^2\right)$, т. е., действительно, $x+y$
лежит $l_2$. Кроме того, если $x=\{x_n\}\in l_2$ и $\alpha\in\mathbf{R}$, то $\alpha x=\{\alpha x_n\}\in l_2$. Таким
м, $l_2$ является линейным пространством.
ведем скалярное произведение элементов $x=\{x_n\}$ и $y=\{y_n\}$ из $l_2$ по фор-

$$(x,\ y)=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+\ldots+x_n\cdot y_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n. \qquad (10.142)$$

равенства $|x_n y_n|\leqslant 0{,}5\left(x_n^2+y_n^2\right)$ следует, что ряд, стоящий в правой части
тва (10.142), сходится абсолютно. Нетрудно проверить, что аксиомы «а»—«г»
ного произведения выполнены. Таким образом, $l_2$ — предгильбертово
анство.
Пример 3. Пусть $L_2[a, b]$ — множество функций с интегрируемым квадратом
резке $[a, b]$. Скалярное произведение $(x, y)$ двух функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$
$[a, b]$ определим равенством

$$(x,\ y)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt. \qquad (10.143)$$

ксиомы скалярного произведения проверяются непосредственно. Норма
ции $x=x(t)$ из $L_2[a, b]$ определяется равенством

$$\|x\|=\left(\int_a^b x^2(t)\,dt\right)^{1/2}, \qquad (10.144)$$

овпадает с формулой (10.42), а неравенство Коши — Буняковского (10.140)
бретает вид

$$\left|\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}\,\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,dt}\,. \qquad (10.145)$$

**Пример 4.** Рассмотрим множество $L_2[a, b]$. Пусть $\rho(t)$ — непрерывная на
] функция, $\rho(t)>0$, $t\in(a, b)$. Тогда скалярное произведение $(x, y)$ функций
$(t)$ и $y=y(t)$ из $L_2[a, b]$ можно определить по формуле

$$(x,\ y)=\int_a^b \rho(t)\,x(t)\,y(t)\,dt. \qquad (10.146)$$

В этом случае

$$\|x\|=\int_a^b \rho(t)\,x^2(t)\,dt. \qquad (10.147)$$

**Гильбертово пространство.** Введем понятие сходимости в про-
анстве со скалярным произведением. Для этого определим рас-
ние $\rho(x, y)$ между элементами $x$ и $y$ из $V$ по формуле

$$\rho(x,\ y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y,\ x-y)}. \qquad (10.148)$$

Последовательность векторов $\{x_n\} \in V$ называется *сходящейся (по норме)* к вектору $x$ из $V$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^n, x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0.$$

Если последовательность $\{x^n\}$ сходится к $x$ по норме, то будем писать $x^n \longrightarrow x$ при $n \longrightarrow \infty$.

**Пример 5.** Расстояние между элементами $x = \{x_n\}$ и $y = \{y_n\}$ из $l_2$ определяется равенством $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$, а сходимость последовательности $x^k = \{x_n^k\}$ к $x = \{x_n\}$ означает, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^k - x_n)^2} = 0.$$

**Пример 6.** Расстояние между функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ из $L_2[a, b]$ в соответствии с равенствами (10.148) и (10.143) имеет вид

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt}, \tag{10.149}$$

а сходимость последовательности функций $\{x_n(t)\}$ из $L_2[a, b]$ к функции $x(t)$ из $L_2[a, b]$ определяется соотношением

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_a^b (x_n(t) - x(t))^2 dt} = 0. \tag{10.150}$$

Сходимость, определяемая равенством (10.150), называется *сходимостью в среднем квадратичном* или просто *в среднем*.

Пусть последовательность элементов $\{x^n\}$ пространства $V$ сходится к $x$. Из неравенства $\|x^n\| = \|x^n - x + x\| \leqslant \|x^n - x\| + \|x\|$ следует, что *всякая сходящаяся* в $V$ *последовательность ограничена*, т. е. существует число $K > 0$, такое, что $\|x^n\| \leqslant K$, $\forall n$.

Последовательность векторов $\{x^n\}$ из $V$ называется *последовательностью Коши* или *фундаментальной последовательностью*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n, m \geqslant N$ выполнено неравенство

$$\rho(x^n, x^m) = \|x^n - x^m\| < \varepsilon.$$

Пространство $V$ называется *полным*, если в нем всякая последовательность Коши $\{x^n\} \in V$ сходится к элементу пространства $V$. Полное предгильбертово пространство называется *пространством Гильберта** или *гильбертовым пространством* и обозначается буквой $H$.

Напомним, что пространство называется конечномерным ($n$-мерным), если в нем найдется $n$ линейно независимых элементов, а всякие $n+1$ его элементов линейно зависимы. Далее пространство $V$ называется *бесконечномерным*, если для любого числа $N$ в $V$

* Д. Гильберт (1862—1943) — немецкий математик.

найдется $N$ линейно независимых элементов. Например, пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций является бесконечномерным, так как система функций $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, ..., $f_n(x)=x^n$, ... линейно независима. Этот факт установлен в примере 3 § 1.6, ч. I.

Часто в определение предгильбертового или гильбертового пространства включается дополнительное требование бесконечномерности, при этом всякое конечномерное пространство со скалярным произведением называют *евклидовым*, а бесконечномерное — *предгильбертовым* или *гильбертовым*, если оно полное. Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ является полным. Гильбертовым является пространство $l_2$. Доказательство этого факта опускается.

Пусть $x_n \longrightarrow x$ и $y_n \longrightarrow y$ при $n \longrightarrow \infty$. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y). \tag{10.152}$$

Действительно, имеет место оценка

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \leqslant$$
$$\leqslant |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\|.$$

В силу сходимости последовательностей $(x_n)$ и $(y_n)$ существует число $K$, такое, что $\|x_n\| \leqslant K$, $\|y_n\| \leqslant K$, $\forall n$. Так как $x_n \longrightarrow x$ и $y_n \longrightarrow y$ при $n \longrightarrow \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $N$, такой, что выполнены неравенства $\|x_n - x\| < \varepsilon/2K$ и $\|y_n - y\| < \varepsilon/2K$. Отсюда и из приведенной оценки имеем

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| < \frac{\varepsilon}{2K} K + \frac{\varepsilon}{2K} K = \varepsilon, \quad n \geqslant N,$$

что и доказывает равенство (10.152).

Свойство скалярного произведения, выраженное равенством (10.152), называется *непрерывностью скалярного произведения.*

**Ортогональность.** Элементы $x$ и $y$ из $V$ называются *ортогональными*, если $(x, y)=0$. Если $x$ ортогонален $y$, то будем писать $x \perp y$. Ясно, что нулевой элемент пространства $V$ ортогонален любому элементу $x \in V$.

Покажем, что если $x \in V$ ортогонален любому элементу из $V$, то $x$ — нулевой элемент. В самом деле, так как $(x, y)=0$, $\forall y \in V$, то при $y=x$ получаем $(x, x)=0$, т. е. $x$ — нулевой элемент в силу аксиомы «г» скалярного произведения.

Если $x$ ортогонален элементам $x^1$, $x^2$, ..., $x^n$ из $V$, то $x$ ортогонален любой линейной комбинации $y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k$ этих элементов. Действительно, из условия $(x, x^k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеем

$$(x, y) = \left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x, x^k) = 0.$$

Кроме того, из непрерывности скалярного произведения следует, что если $x^n \to x$ при $n \to \infty$ и $y \perp x^n$, $\forall n$, то $y \perp x$, так как $(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x^n, y) = 0$.

**Ортонормированные системы.** Система элементов $\{y_n\}$ пространства $V$ называется *ортогональной*, если $(\varphi_n, \varphi_m) = 0$, $n \neq m$. Если норма каждого элемента ортогональной системы равна единице, то система называется *ортонормированной*. Таким образом, система $\{\varphi_n\}$ из $V$ ортонормирована, если

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Пусть $x = \sum_{k=1}^{\infty} x^k$ и все слагаемые $x^k$ попарно ортогональны. Тогда имеет место равенство (обобщенная теорема Пифагора)

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|^2. \tag{10.153}$$

Действительно, в силу непрерывности скалярного произведения получаем

$$(x, x^l) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k, x^l\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k, x^l\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x^k, x^l\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x^k, x^l) = (x^l, x^l) = \|x^l\|^2.$$

Отсюда

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(x, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x, x^k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|x^k\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|^2,$$

т. е. равенство (10.153) доказано.

**Абстрактный ряд Фурье.** Пусть $f$ — элемент пространства $H$, а $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная система элементов этого пространства. Назовем числа

$$c_k = (f, \varphi_k), \; k = 0, 1, \ldots$$

*коэффициентами Фурье* элемента $f$ относительно системы $\{\varphi_k\}$, а ряд

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k -$$

*рядом Фурье элемента $f$ по ортонормированной системе* $\{\varphi_k\}$.

Тот факт, что $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k$ — ряд Фурье элемента $f$ по системе $\{\varphi_k\}$, будем записывать в виде $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k$.

Обозначим через

$$S_n = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k$$

частичную сумму ряда Фурье. Говорят, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k$ сходится к сумме $f$, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(f - S_n,\ f - S_n)} = 0.$$

Пусть $\{f_k\}$ — ортогональная система элементов пространства $H$, не содержащая нулевого вектора. Умножив каждый элемент $f_k$ на нормирующий множитель $\lambda_k = 1/\|f_k\|$, получим ортонормированную систему

$$\{\varphi_k\} = \{f_k/\|f_k\|\}.$$

Пусть $f$ — произвольный элемент из $H$. Поставим ему в соответствие ряд Фурье по системе $\{\varphi_k\} = \{f_k/\|f_k\|\}$. Согласно соотношениям $c_k = (f, \varphi_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, получаем

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} (f,\ \varphi_k)\,\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(f,\ \frac{f_k}{\|f_k\|}\right) \frac{f_k}{\|f_k\|} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f, f_k)}{\|f_k\|^2} f_k,$$

т. е. ряд Фурье элемента $f$ относительно ортогональной системы $\{f_k\}$ имеет вид $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k$, где

$$c_k = \frac{1}{\|f_k\|^2} (f,\ f_k).$$

**Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Замкнутость и полнота ортогональных систем.** Обозначим

$$\delta_n^2 = \left\| f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k f_k \right\|^2, \quad \alpha_k \in \mathbf{R}.$$

Можно показать, что

$$\min \delta_n^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \|f_k\|^2. \tag{10.154}$$

Таким образом, коэффициентами $\alpha_k$, при которых величина $\delta_n^2$ достигает наименьшего значения, являются коэффициенты Фурье элемента $f$ по ортогональной системе $\{f_k\}$. В этом и заключается *минимальное свойство коэффициентов Фурье.*

Так как $\delta_n^2 \geqslant 0$, то из формулы (10.154) получаем *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|f_k\|^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{10. 155}$$

Из равенства (10.154) вытекает, что величина $\min \delta_n^2$ стремится к нулю при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|f_k\|^2 = \|f\|^2,$$

которое называется *уравнением замкнутости* или *равенством Парсеваля — Стеклова.*

Если система $\{f_k\} = \{\varphi_k\}$ ортонормирована, то уравнение замкнутости принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2. \tag{10.156}$$

Из вышеизложенного следует, что равенство Парсеваля (10.156) равносильно выполнению соотношения $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k$, т. е. ряд Фурье $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k$ элемента $f$ сходится к $f$ по норме пространства $H$.

Ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ элементов пространства $H$ называется *замкнутой*, если равенство Парсеваля (10.156) выполняется для любого элемента $f \in H$.

Итак, ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ замкнута в $H$ тогда и только тогда, когда каждый элемент $f$ из $H$ разлагается в ряд Фурье по системе $\{\varphi_k\}$, сходящийся к $f$.

Система элементов $\{\varphi_k\}$ называется *полной* в $H$, если в $H$ нет элемента, отличного от нулевого, ортогонального всем элементам системы $\{\varphi_k\}$.

Справедливы следующие теоремы, доказательства которых опускаются.

**Теорема 10.17.** Любая замкнутая ортонормированная система элементов предгильбертова пространства $H$ является полной.

**Теорема 10.18.** В гильбертовом пространстве $H$ любая ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ замкнута тогда и только тогда, когда она полна.

## ЛИТЕРАТУРА


*Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Высш. шк., 1978.— 288 с.

*Краснов М. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Высш. шк., 1983.— 128 с.

*Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа.— М.: Высш. шк., 1981. Т. 1.—688 с.

*Кузнецов Л. А.* Сборник заданий по высшей математике.— М.: Высш. шк., 1983.— 176 с.

Математические основы теории автоматического регулирования/В. А. Иванов, В. С. Медведев, Б. К. Чемоданов, А. С. Ющенко; Под ред. Б. К. Чемоданова — М.: Высш. шк., 1977. Т. 2.— 518 с.

*Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1980.— 350 с.

*Шмелев П. А.* Теория рядов в задачах и упражнениях.— М.: Высш. шк., 1983.— 176 с.